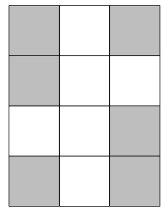
Domácí zábava z Kombinatorické teorie her, 1. série

Veškerá tvrzení precizně zdůvodněte.

(1.1) Uvažujme následující pozici,



kde šedivá políčka jsou nepřístupná. Nakreslete kompletní herní strom jak pro hru Cram, tak pro Domineering. Listy stromu by měly být všechny pozice, ve kterých ani jeden hráč nemůže táhnout. Kdo vyhraje Domineering, když svislý hráč začíná? Kdo vyhraje, když začíná vodorovný hráč? A kdo vyhraje Cram? *1 bod*

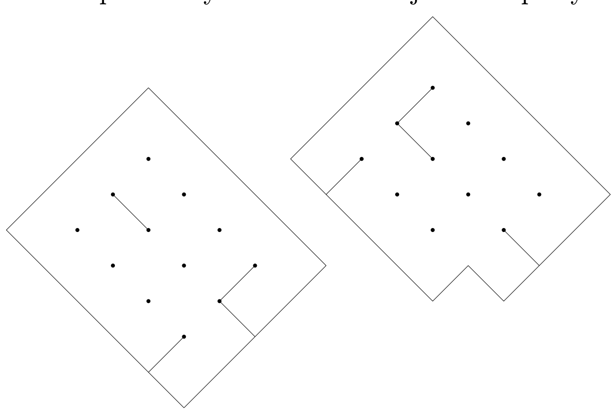
(1.2) Uvažujme hru Cram/Dláždění (viz přednáška) pro tabulku velikosti $n \times m$.
- (i) Jak hra dopadne, když jsou n i m sudá? *1 bod*
- (ii) Jak hra dopadne, když je právě jedno z čísel n a m liché? *1 bod*

(1.3) Uvažujme množinu $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Dva hráči se střídají v zabírání čísel. Vyhraje ten, kdo na konci bude mít delší aritmetickou posloupnost na jím zabraných číslech (tedy z jím zabraných čísel půjde vybrat podmnožina tvořící aritmetickou posloupnost). Charakterizujte, pro jaká n vyhraje první hráč, pro jaká n druhý a kdy je hra remízová. *2 body*

(1.4) Začněme s hromádkou n sirek. Střídají se dva hráči, kteří mohou buďto
- (a) pokud počet s sirek na hromádce není mocnina 2, odstranit nejvyšší mocninu 2 menší než s
- (b) pokud je počet s sirek na hromádce sudý, odstranit polovinu sirek.

Kdy vyhraje první hráč a kdy druhý? A co když uvažujeme misère variantu hry? *3 body*

(1.5) Uvažme hry Maze a Maize z přednášky a k nim následující hrací plány:



Určete výsledek her Maize i Maze na obou hracích plánech, a to pro každé z možných počátečních políček žetonu (neboli určete, zda je políčko třídy $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{P}$ nebo $\mathcal{N}$. *2 body*