0. Jak se dokazuje transcendence *Martin Mareš, srpen 2009*

Od malička víme, že Eulerovo číslo, definované například jako součet řady

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \tag{$*$}$$

je *transcedentní,* čili že neexistuje žádný polynom s celočíselnými koeficienty, jehož kořenem by toto číslo bylo. Jak se ale něco takového dokazuje? Pojďte, podíváme se.

Rozcvička: Než se pustíme do transcendence, dokažme nejprve daleko slabší tvrzení, totiž že e je *iracionální.* (Pokud spěcháte, klidně tuto část přeskočte, ve zbytku textu nebude potřeba. Jen pomůže oprášit některé důležité techniky.) Tento elegantní důkaz pochází z knížky Proofs from The Book od G. Zieglera a M. Aignera.

Pro spor předpokládejme, že e je rovno a/b pro nějaká přirozená čísla a, b. Jelikož $2 < e < 3$, musí být $a, b \geq 2$. Položme nyní

$$x := b! \cdot \left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!} \right).$$

Budeme zkoumat, co je toto číslo x zač. Nejprve dosadíme za e zlomek a/b a povšimneme si, že číslo x musí být celé:

$$x = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!},$$

přičemž $b!/n!$ je pro všechna $0 \leq n \leq b$ přirozené.

Pokud naopak do vztahu pro x dosadíme za e nekonečnou řadu $(*)$, dostaneme:

$$x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!}.$$

Z toho ihned vidíme, že x je kladné, jelikož všechna $b!/n!$ jsou kladná. Brzy ovšem dokážeme, že $x < 1$, a tím dojdeme ke sporu: žádné celé číslo větší než 0 a současně menší než 1 neexistuje.

Stačí odhadnout:

$$\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}},$$

pročež platí:

$$x \leq \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n}} = \frac{1}{b+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b+1} \cdot \frac{b+1}{b} = \frac{1}{b} < 1.$$

$\heartsuit$

Nyní pokračujme ve stopách nenápadného článečku „Transzendenz von e im Leistungkurs?“ od Rudolfa Fritsche. Nejprve spočteme jeden snadný integrál:

Lemma A: $S_j := \int_0^\infty x^j e^{-x}\,\mathrm{d}x = j!$.

Důkaz: Integrací per partes dostaneme:

$$S_j = \int_0^\infty x^j e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^j e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty j x^{j-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0 + j \cdot S_{j-1}.$$

Pokračujeme indukcí a zastavíme se u $S_0 = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$. $\heartsuit$

Pomocné funkce: Později budeme potřebovat i o něco složitější funkce, z nichž některé budou záviset na parametrech $k, n \in \mathbb{N}$, jejichž hodnotu zvolíme později:

$$\begin{aligned}
&g(x) := x(x-1)\dots(x-n),\\
&h(x) := (x-1)(x-2)\dots(x-n)e^{-x},\\
&f(x) := g(x)^k \cdot h(x) = x^k(x-1)^{k+1}(x-2)^{k+1}\dots(x-n)^{k+1}e^{-x}.
\end{aligned}$$

Roznásobíme-li všechny součiny v definici funkce f, získáme pro ni vztah

$$f(x) = \sum_{j=k}^{k+n(k+1)} b_j x^j e^{-x} \qquad \text{pro vhodná } b_j \in \mathbb{Z}.$$

Navíc víme, že $b_k = (-1)^{k+1}(-2)^{k+1}\dots(-n)^{k+1} = \pm(n!)^{k+1}$.

Integrál z funkce f již není tak jednoduchý jako S_j, ale stále o něm můžeme snadno dokázat, že jeho hodnota je celé číslo:

Lemma B: $w_0 := \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \pm(n!)^{k+1}k! + c_0(k+1)!$ pro nějaké $c_0 \in \mathbb{Z}$.

Důkaz: Z roznásobeného tvaru funkce f dostaneme použitím Lemmatu A:

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j \ge k}\left(b_j \int_0^\infty x^j e^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{j\ge k} b_j S_j = \sum_{j \ge k} b_j \cdot j!.$$

Přitom první člen sumy je roven $b_k \cdot k! = \pm(n!)^{k+1} \cdot k!$ a všechny následující členy jsou dělitelné $(k+1)!$. $\heartsuit$

Aby byl náš arsenál kompletní, připravíme si ještě „roztržené“ verze integrálu w_0, totiž integrály:

$$v_i := \int_0^i f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad w_i := \int_i^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } 1 \le i \le n.$$

Lemma C: $w_i = e^{-i} \cdot c_i \cdot (k+1)!$ pro $1 \le i \le n$ a nějaká $c_i \in \mathbb{Z}$.

Důkaz: Substitucí získáme $w_i = \int_0^\infty f(x+i)\,\mathrm{d}x$, po dosazení definice funkce f pak:

$$w_i = \int_0^\infty (x+i)^k (x+i-1)^{k+1} \dots (x+i-n)^{k+1} e^{-x-i}\,\mathrm{d}x.$$

Zaměřme se na integrand a roznásobme všechny závorky. Jelikož i leží mezi 1 a n, je jedna z nich rovna x a není to první závorka, takže v roznásobeném tvaru nevystupuje proměnná x v menší než $(k+1)$-ní mocnině. Integrand tedy mužeme zapsat následovně:

$$e^{-i} \cdot \sum_{j=k+1} b_{ij} x^j e^{-x}, \quad \forall j : b_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Použitím Lemmatu A na jednotlivé sčítance pak získáme požadovaný tvar. ♡

Lemma D: $|v_i| \leq iG^k H$ pro vhodné konstanty G, H závislé pouze na n.

Důkaz: Nejprve omezme hodnoty funkcí g, h, f pro $x \in \langle 0, n \rangle$. Jistě můžeme zvolit G tak, aby $|g(x)| \leq G$ (vyhoví například $G = n^{n+1}$). Analogicky pro vhodné H bude platit $|h(x)| \leq H$ (zde postačí $H = n^n$). Z toho ihned $|f(x)| \leq |g(x)|^k \cdot |h(x)| \leq G^k H$.

Integrujeme-li přes interval délky L funkci, jejíž absolutní hodnota je omezena nějakým M, činí hodnota integrálu nejvýše LM (plocha mezi x-ovou osou a kladnou částí křivky se celá vejde do obdélníku $L \times M$). Proto $v_i = \int_0^i f(x)\,\mathrm{d}x \leq iG^k H$. ♡

Nyní máme vše připraveno a můžeme se pustit do důkazu transcendence.

Plán: Předpokládejme pro spor, že existuje polynom s celočíselnými koeficienty, jehož kořenem je číslo e. Jinými slovy že existují nějaká $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, pro něž platí $a_0 e^0 + \dots + a_n e^n = 0$. Navíc $a_0 \neq 0$ a $a_n \neq 0$.

Postupně ukážeme, že existují čísla R, A, B taková, že:

$$R \cdot (a_0 e^0 + \dots + a^n e^n) = A + B. \qquad (**)$$

Přitom bude platit, že R je reálné, A je reálné v absolutní hodnotě menší než 1 a B je celé a nenulové. To ovšem vede ke sporu, jelikož levá strana rovnosti je rovna nule (díky závorce), zatímco pravá strana nulová být nemuže.

Budeme používat předpřípravené konstanty v_i a w_i, přičemž parametr n použitý v jejich definici bude roven stupni domnělého polynomu a hodnotu parametru k zvolíme na konci důkazu.

Volba R, A, B: Zvolíme $R := w_0/k!$. Levá strana $(**)$ tedy bude rovna $(a_0 e^0 w_0 + \dots + a_n e^n w_0)/k!$. Pokud každé $a_i e^i w_0$ zapíšeme ekvivalentně jako $a_i e^i (v_i + w_i)$, celý výraz můžeme rozebrat na součet následujících dvou částí:

$$A = \frac{v_1 a_1 e^1 + \dots + v_n a_n e^n}{k!}, \quad B = \frac{w_0 a_0 e^0 + \dots + w_n a_n e^n}{k!}$$

(přitom A je o člen kratší, jelikož $v_0 = 0$). Nyní stačí ověřit, že A a B mají pro vhodnou volbu parametru k požadované vlastnosti.

Vlastnosti B: Dosadíme do výrazu pro B to, co víme o hodnotách w_i z Lemmat B a C:

$$B = \frac{\pm(n!)^{k+1}k! \cdot a_0 e^0 + \sum_{i=0}^{n} e^{-i} c_i (k+1)! \cdot a_i e^i}{k!},$$

což může vypadat děsivě, ale po zkrácení faktoriálů a mocnin e^i s e^{-i} zbude pouze:

$$B = \pm(n!)^{k+1} a_0 + \sum_{i=0}^{n} c_i a_i (k+1).$$

To je určitě celé číslo (všechna a_i i c_i jsou celočíselná), zařiďme ještě, aby bylo nenulové. Zvolme k tak, aby $k+1$ bylo prvočíslo větší než $\max(n, |a_0|)$. Ukážeme, že B není tímto prvočíslem dělitelné, a tudíž ani nulové. Stačí si uvědomit, že všechna $c_i a_i (k+1)$ jsou číslem $k+1$ dělitelná, ale $(n!)^{k+1} a_0$ má ve svém prvočíselném rozkladu pouze členy menší nebo rovné $\max(n, |a_0|)$.

Vlastnosti A: Zbývá ukázat, že $|A| < 1$. K tomu použijeme trojúhelníkovou nerovnost a odhad z Lemmatu D:

$$|A| \leq \frac{|v_1 a_1 e^1| + \ldots + |v_n a_n e^n|}{k!} \leq \frac{1 \cdot G^k H \cdot |a_1| \cdot e^1 + \ldots + n \cdot G^k H \cdot |a_n| \cdot e^n}{k!}.$$

Oddělíme-li části nezávislé na k, získáme:

$$|A| \leq \frac{G^k}{k!} \cdot (1 \cdot |a_1| \cdot e^1 + \ldots + n \cdot |a_n| \cdot e^n).$$

Jelikož s k jdoucím do nekonečna konverguje výraz $G^k/k!$ k nule, je pro dostatečně velké k pravá strana předchozí nerovnosti menší než 1. Tak získáme $|A| < 1$.

Závěr: Abychom splnili všechny požádavky, potřebujeme tedy, aby k bylo dostatečně velké prvočíslo. To je ale snadné splnit, protože prvočísel existuje nekonečně mnoho. Tím je tvrzení o transcendenci čísla e dokázáno. $\heartsuit$