Kombinatorika do kapsy

Martin Mareš ⟨*mj@ucw.cz*⟩, 2022-10-18

(1) **Značení:**

- $[n] := \{1, \ldots, n\}$
- $n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ *(klesající mocnina)*
  $n^{\underline{0}} = 1$, jelikož je to prázdný součin.

(2) **Počet funkcí** z n-prvkové množiny N do m-prvkové množiny M:

$$\#f : N \to M = m^n$$

Nebo: $\#f : [n] \to [m] = m^n$

Pro každý z n prvků si nezávisle na ostatních můžeme vybrat m možností, kam se zobrazí.

(3) **Princip bijekce:** pokud mezi konečnými množinami A a B existuje bijekce, tak mají stejný počet prvků. Speciálně tedy bývá jedno, jestli $[n]$ je konkrétní množina $\{1, \ldots, n\}$, nebo libovolná jiná n-prvková množina.

(4) **Počet podmnožin** n-prvkové množiny N:

$$|2^N| = 2^n$$

Nebo: $\#A \subseteq N = 2^n$

Nebo: $|2^{[n]}| = 2^n$

Podmnožině $A \subseteq N$ přiřadíme *charakteristickou funkci* $c_A : N \to \{0, 1\}$ definovanou tak, že $c_A(x) = 1$ pro $x \in A$ a $c_A(x) = 0$ jinde. Každá taková funkce jednoznačně určuje podmnožinu (formálně: existuje bijekce mezi množinou všech podmnožin 2^N a množinou všech funkcí z N do $\{0, 1\}$. Proto je podmnožin stejně jako funkcí, podle (2) tedy 2^n.

(5) **Počet sudých a lichých podmnožin** n-prvkové neprázdné množiny N. Označíme $\mathcal{S} = \{A \subseteq N \mid |A| \text{ je sudé}\}$ množinu všech sudých podmnožin,
$\mathcal{L} = \{A \subseteq N \mid |A| \text{ je liché}\}$ množinu všech lichých podmnožin. Potom:

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$$

Každá podmnožina je buď sudá nebo lichá, takže $|\mathcal{S}| + |\mathcal{L}|$ je rovno počtu všech podmnožin, což podle (4) je 2^n. Jakmile tedy ukážeme, že sudých a lichých je stejně, musí jak $|\mathcal{S}|$, tak $|\mathcal{L}|$ být $2^n/2 = 2^{n-1}$.

To, že sudých a lichých je stejně, dokážeme sestrojením bijekce. Zvolíme nějaký prvek $a \in N$ a pro $A \subseteq N$ definujeme $f(A) = A \triangle \{a\}$. Čili pokud a leži v A, tak ho odebereme, pokud neleží, tak ho přidáme. Všimneme si, že f zobrazuje sudé množiny na liché a opačně. Dokonce je sama k sobě inverzní, takže je to bijekce mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$.

(6) **Počet prostých funkcí** z n-prvkové množiny do m-prvkové množiny:

$$\#\{f : [n] \to [m] \mid f \text{ prostá}\} = m^{\underline{n}}$$

Prvky $[n]$ procházíme v nějakém pořadí a přidělujeme jim funkční hodnoty z $[m]$. Pro první prvek máme m možností, pro druhý už jen $m-1$ atd.

(7) **Kódování funkcemi.** Pomocí funkcí můžeme popisovat různé další objekty:

- $f : A \to \{0,1\}$ odpovídají *podmnožinám* (jejich charakteristické funkce)
- $f : [k] \to A$ odpovídají *uspořádaným k-ticím*, tedy prvkům kartézské mocniny A^k: $f(1)$ je první prvek k-tice, $f(2)$ druhý atd.
- $f : [k] \to A$ prosté odpovídají *uspořádaným k-ticím bez opakování*
- $f : \mathbb{N} \to A$ odpovídají *nekonečným posloupnostem* prvků z A

(8) **Permutace** na n-prvkové množině N říkáme bijekcím z N do N. Každá prostá funkce mezi dvěma stejně velkými množinami nutně musí být bijekce, takže počet bijekcí je podle (6) roven $n^{\underline{n}} = n!$. Tomu říkáme *faktoriál* čísla n. Přitom $0! = 1$, opět se jedná o prázdný součin.

(9) **Lineární uspořádání** na n-prvkové množině N popíšeme očíslováním prvků od nejmenšího k největšímu, tedy bijekcí $[n] \to N$. Takových bijekcí je stejně jako permutací na N, tedy $n!$. Často jim dokonce také (lehce nepořádně) říkáme permutace.

(10) **Neuspořádané k-tice** neboli k-prvkové podmnožiny n-prvkové množiny N:

$$\#\{A \subseteq N \mid |A| = k\} = n^{\underline{k}}/k!$$

Hledaný počet označme H. Budeme dvěma způsoby počítat uspořádané k-tice prvků N bez opakování. Jednak odpovídají prostým funkcím z $\{1,\ldots,k\}$ do A, takže podle (6) jich je $n^{\underline{k}}$. Jednak můžeme každou neuspořádanou k-tici uspořádat $k!$ různými způsoby, což dává $H \cdot k!$ možností. Oběma způsoby musí vyjít totéž, takže $H \cdot k! = n^{\underline{k}}$, a tedy $H = n^{\underline{k}}/k!$.

(11) **Kombinační čísla (binomické koeficienty)** jsou užitečná zkratka pro právě odvozený vztah. Pro čísla $n, k \geq 0$ zavedeme:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

$$\textit{Nebo:} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Zavedeme-li navíc následující značení pro množinu všech k-prvkových podmnožin:

$$\binom{N}{k} = \{A \subseteq N \mid |A| = k\}$$

dostaneme stručný zápis vztahu (10):

$$\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}$$

(12) **Vlastnosti kombinačních čísel:**

- $\binom{n}{0} = 1 \ldots$ prázdná podmnožina je jen jedna
- $\binom{n}{n} = 1 \ldots$ „plná“ podmnožina je také jedna
- $\binom{n}{1} = n \ldots$ jednoprvkových je tolik, co prvků
- $\binom{n}{n-1} = n \ldots$ $(n-1)$-prvková podmnožina je určena tím, který jeden prvek v ní chybí
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \ldots$ obecně $(n-k)$-prvková podmnožina je určena tím, kterých k prvků v ní není
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \ldots$ roztřídili jsme všechny podmnožiny n-prvkové množiny podle velikosti

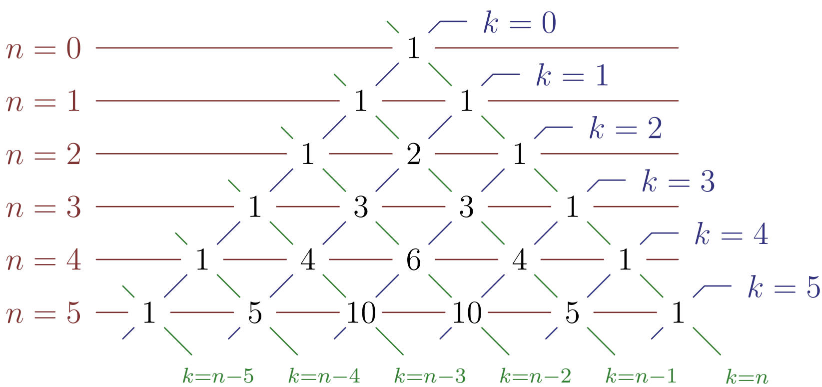
(13) **Charakteristické funkce** k-prvkových podmnožin množiny $[n]$ vypadají tak, že právě k prvkům přiřazují jedničku a zbylým $n-k$ nulu. Odpovídají tedy posloupnostem n nul a jedniček s právě k jedničkami.

(14) **Součet kombinačních čísel** pro $n, k \geq 1$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Levá strana počítá k-prvkové podmnožiny nějaké n-prvkové množiny A. Zvolíme libovolně $a \in A$ a rozdělíme k-prvkové podmnožiny na dva druhy: neobsahující a a obsahující a. Těch prvních je $\binom{n-1}{k}$, protože vybíráme k-prvkovou podmnožinu ze zbylých $n-1$ prvků. Ty druhé obsahují kromě a ještě dalších $k-1$ prvků vybraných ze zbylých $n-1$ prvků, což lze vybrat $\binom{n-1}{k-1}$ způsoby.

(15) **Pascalův trojúhelník** – tabulka kombinačních čísel:



Sledujte, jak se v Pascalově trojúhelníku projevují identity (12) a (14).

(16) **Binomická věta.** Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Roznásobením součinu $(x+y)(x+y)\dots(x+y)$ vznikne 2^n členů. Každý z nich je součinem celkem n proměnných x a y, takže ho můžeme přerovnat na $x^{n-k}y^k$ pro nějaké k. Stejný výraz vznikne přerovnáním ze všech členů, které z právě k závorek vybraly y a ze zbylých vybraly x. To lze provést $\binom{n}{k}$ způsoby.

(17) **Aplikace binomické věty:**

- Pro $x = y = 1$ dostaneme: $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
  Takže součet n-tého řádku Pascalova trojúhelníku je 2^n. To už známe z (12).
- Pro $x = 1$, $y = -1$ dostaneme: $(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$.
  Proto $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots - \ldots$, takže sudých a lichých podmnožin je stejně – máme jiný důkaz tvrzení (5). (Mimochodem, kde jsme potřebovali předpoklad $n > 0$, bez kterého tvrzení neplatí?)
- Přijdete na nějaké dalši zajímavé dosazení?

(18) **Kuličky v přihrádkách.** Kolika způsoby jde rozmístit n nerozlišitelných kuliček do k rozlišitelných přihrádek? Přihrádky budeme plnit strojem, který umí příkazy K „přidej kuličku“ a P „ukonči přihrádku“. Existuje bijekce mezi rozmístěními kuliček do přihrádek a posloupnostmi příkazů pro stroj, které obsahují n příkazů K, k příkazů P a končí příkazem P. Posloupnost je tedy dlouhá $n+k$, přičemž na prvních $n+k-1$ pozicích je nějak rozmístěno $k \times P$. Počet takových posloupností je $\binom{n+k-1}{k}$.