# Kombinatorické drobnosti

*Martin Mareš*

Tento textík shrnuje několik vět a jejich důkazů, které zazněly na mých přednáškách z Kombinatoriky a grafů I a není snadné je najít v české literatuře.

### Hallova věta

Zde je elementární důkaz Hallovy věty (bez použití teorie toků). Je to trochu podrobnější verze jednoho z důkazů uvedených v Diestlově knize Graph Theory.

**Definice:** *Množinový systém* je dvojice $(X, \mathcal{S})$, kde $X$ je množina (říká se jí *nosná množina* systému) a $\mathcal{S}$ je systém jejích podmnožin, tedy $\mathcal{S} \subseteq 2^X$. *Systémem různých reprezentantů* (SRR) daného množinového systému nazveme prostou funkci $f : \mathcal{S} \rightarrow X$ takovou, že $\forall A \in \mathcal{S} : f(A) \in A$.

**Poznámky:**

- SRR tedy z každé množiny vybere jeden prvek (reprezentanta množiny) tak, aby různé množiny dostaly různé reprezentanty.
- Často se nám bude hodit, aby množinový systém mohl obsahovat jednu množinu vícekrát. Formálně bychom to mohli zařídit třeba tak, že $\mathcal{S}$ nebude množina, nýbrž posloupnost, ale tím se značně zkomplikuje zápis. Místo toho budeme o $\mathcal{S}$ uvažovat jako o *multimnožině* – v ní má každý prvek určenu svou *četnost,* což je nějaké přirozené číslo. Teorii multimnožin nebudeme zavádět formálně, ale rozmyslete si, že následující důkaz bude fungovat i s četnostmi prvků.
- Při zkoumání SRR nehrají žádnou roli ty prvky nosné množiny, které se nevyskytují v žádné množině systému. Můžeme je tedy vynechat a v systému $(X, \mathcal{S})$ položit $X$ rovno $\bigcup \mathcal{S}$, čili sjednocení všech množin systému. (Formálně: $\bigcup \mathcal{S} = \{x \mid \exists A \in S : x \in A\}$.)

**Věta:** *(Hallova)* Množinový systém $\mathcal{S}$ má SRR právě tehdy, když pro každý jeho podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ platí, že $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}|$.

*Důkaz:* Pravá strana ekvivalence (té se říká Hallova podmínka) říká velice přirozenou věc: Pokud si ze systému vybereme nějakých $k$ množin, musí mít dohromady alespoň $k$ prvků. V opačném případě jistě nemůže SRR existovat. To dokazuje implikaci zleva doprava (respektive její obměnu: neplatí podmínka $\Rightarrow$ SRR neexistuje).

Druhou implikaci budeme dokazovat indukcí podle počtu množin v systému. Pokud $|\mathcal{S}| \leq 1$, SRR evidentně existuje (pro 1 množinu Hallova podmínka říká, že tato množina není prázdná).

V indukčním kroku hledáme SRR pro nějaký systém alespoň dvou množin za předpokladu, že pro všechny menší systémy (s menším počtem množin) už věta platí. Rozlišme dva případy:

**a)** Nechť pro všechny vlastní podsystémy ($\emptyset \neq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$) platí Hallova podmínka ostře, tedy $|\bigcup \mathcal{T}| \geq |\mathcal{T}| + 1$. Tehdy si vybereme libovolnou množinu $A \in \mathcal{S}$ a zvolíme libovolný její prvek $a \in A$ za jejího reprezentanta. Reprezentanty ostatních množin pak nalezneme pomocí indukce na systému $\mathcal{S}' = \{B \setminus \{a\} \mid B \in \mathcal{S} \wedge B \neq A\}$. (Co to znamená? Odebrali jsme množinu $A$ a z ostatních množin jsme smazali již použitý prvek $a$.) Nový systém je o jednu množinu menší, takže stačí ověřit, že pro něj stále platí Hallova podmínka.

Libovolný podsystém $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{S}'$ můžeme zapsat jako $\{B_1 \setminus \{a\}, \ldots, B_k \setminus \{a\}\}$, kde $B_i$ jsou množiny z původního systému $\mathcal{S}$. Proto $|B_1 \cup \ldots \cup B_k| \geq k + 1$ (Hallova podmínka pro původní systém, navíc s ostrou nerovností),⟨1⟩ a tedy $|\bigcup \mathcal{T}'| = |(B_1 \setminus \{a\}) \cup \ldots \cup (B_k \setminus \{a\})| = |(B_1 \cup \ldots \cup B_k) \setminus \{a\}| \geq k$.

**b)** Předchozí případ nenastane, čili existuje nějaký podsystém $\mathcal{T}$ ($\emptyset \neq \mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S}$), který má stejně prvků jako množin, tedy $|\bigcup \mathcal{T}| = |T|$. Tehdy na tento podsystém pošleme indukci (Hallova podmínka evidentně platí a počet množin jsme zmenšili). Reprezentanty zbývajících množin pak nalezneme ještě jedním použitím indukce, tentokrát na systém $\mathcal{U} = \{A \setminus \bigcup \mathcal{T} \mid A \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}\}$. (Jinými slovy, odstranili jsme množiny z $\mathcal{T}$ a pak jsme z každé zbývající množiny smazali prvky, které jsou už zabrané množinami z $\mathcal{T}$.) Stačí ověřit, že pro $\mathcal{U}$ také platí Hallova podmínka:

Mějme podsystém $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Stejně jako v minulém případě i zde ho můžeme zapsat jako $\mathcal{U}' = \{A_1 \setminus \bigcup \mathcal{T}, \ldots, A_k \setminus \bigcup \mathcal{T}\}$, kde všechna $A_i$ leží v $\mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$. Počítejme jeho prvky, využívajíce k tomu, že pro jakékoliv množiny $P, Q$ platí, že $|P \setminus Q| = |P \cup Q| - |Q|$. Tak tedy: $|\bigcup \mathcal{U}'| = |(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \setminus \bigcup \mathcal{T}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup \bigcup \mathcal{T}| - |\bigcup \mathcal{T}|$. Část před '$-$' je přitom sjednocení nějakých $k + |\mathcal{T}|$ množin ze systému $\mathcal{S}$, pro který platí Hallova podmínka, takže tyto množiny musí mít dohromady alespoň $k + |\mathcal{T}|$ prvků. Samotný podsystém $\mathcal{T}$ má ovšem přesně $|\mathcal{T}|$ prvků, takže v celém $\mathcal{U}'$ leží alespoň $k + |\mathcal{T}| - |\mathcal{T}| = k$ prvků.

Tím je důkaz ukončen. ♡

**Nápověda:** Zkuste sledovat chod indukce pro nějaký triviální množinový systém – zajímavě se například chová případ samých jednoprvkových množin nebo naopak jsou-li všechny množiny stejné.

Také si všimněte, že důkaz by fungoval i tehdy, kdybychom za základní případ považovali prázdný systém. Co by se stalo pro $|\mathcal{S}| = 1$? Tehdy by neexistoval žádný vlastní podsystém, takže podmínka části **a)** by byla triviálně splněna a zvolili bychom reprezentanta této jediné množiny libovolně. Následně bychom spustili indukci na prázdný systém a ta by se ihned zastavila. Aby byl důkaz srozumitelnější, zvolili jsme ovšem i tento případ za základní.

## Birkhoffova věta

Následující příklad dokumentuje, že se Hallova věta často hodí k dokazování tvrzení, která na první pohled nemají s kombinatorikou vůbec nic společného.

**Definice:** O matici $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ řekneme, že je *bistochastická,* pokud jsou její prvky nezáporné a součet prvků v každém řádku i v každém sloupce je roven 1. Speciálním

⟨1⟩ Zde takříkajíc kráčíme po náledí. Ostrou nerovnost máme přeci zaručenu jen pro vlastní podsystémy. Nemohlo by se stát, že $B_1, \ldots, B_k$ budou všechny množiny z $\mathcal{S}$? Naštěstí ne, protože jsme $A$ vyřadili. Led je tedy řádně posypaný :)

případem bistochastických matic jsou matice *permutační* – ty obsahují v každém řádku a každém sloupci právě jednu jedničku; všude jinde jsou nulové.

**Pozorování:** Každá bistochastická matice je čtvercová (čili $m = n$). Počítejme dvěma způsoby součet všech prvků matice:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} B_{i,j} &= \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \right) = \sum_{i=1}^{m} 1 = m, \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} B_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.\end{aligned}$$

**Definice:** *Konvexní kombinací* vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme každý výraz typu $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$, kde $\alpha_i$ jsou nezáporná čísla, pro něž platí $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.⟨2⟩

**Věta:** *(Birkhoffova)* Každá bistochastická matice je konvexní kombinací permutačních matic.⟨3⟩

*Důkaz:* Označme $B$ zkoumanou bistochastickou matici velikosti $n \times n$ a $d$ počet jejích nenulových prvků.

Důkaz povedeme pro pevné $n$ indukcí podle $d$. Jelikož se na každém řádku vyskytuje alespoň jedna nenula, musí být $d \geq n$. Pokud $d = n$, musí být tato nenula v řádku jediná, a tedy to musí být jednička. Totéž jistě platí pro sloupce, takže v tomto případě máme tu čest přímo s permutační maticí a jsme hotovi.

Nechť tedy $d > n$ a pro všechny matice s méně než $d$ nenulami věta platí. Předpokládejme nyní, že ve zkoumané matici existují nenulové prvky $B_{1,j_1}, \ldots, B_{n,j_n}$, přičemž všechna $j_i$ jsou navzájem různá. Můžeme si to představit tak, že chceme rozestavět $n$ šachových věží na políčka matice $B$ tak, aby se věže navzájem neohrožovaly a každá z nich stála na některé nenule. (Za chvíli dokážeme, že takové rozestavění vždy existuje.) Buď nyní $\varepsilon$ minimum z těchto nenul a $P$ permutační matice, která má jedničky právě na jejich pozicích $(i, j_i)$.

Jak vypadá matice $B' = B - \varepsilon P$? Jistě má o alespoň jednu nulu víc než $B$ (na místě, kde se minimum nabývalo), ale není bistochastická – součet prvků v každém řádku i sloupci se snížil přesně o $\varepsilon$. Matice $B'' = B'/(1-\varepsilon)$ již tedy bistochastická bude a můžeme na ni použít indukční předpoklad. Podle něj existují permutační matice $P_1, \ldots, P_k$ a konstanty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$ takové, že

$$B'' = \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k.$$

⟨2⟩ Pro představu: jsou-li $x$ a $y$ nějaké dva vektory v $\mathbb{R}^2$, pak množina jejich konvexních kombinací je přesně úsečka $xy$. Pro více bodů v rovině dostaneme jejich konvexní obal.

⟨3⟩ Tuto větu lze chápat i geometricky: Množina všech bistochastických matic tvoří konvexní mnohostěn v prostoru $\mathbb{R}^{n \times n}$ a jeho vrcholy jsou tvořeny permutačními maticemi.

Z toho jednoduchou úpravou dostaneme:

$$B = (1-\varepsilon)(\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_k P_k) + \varepsilon P,$$

a to je hledaná konvexní kombinace. (Ověřte si, že $(1-\varepsilon)\alpha_1 + \ldots + (1-\varepsilon)\alpha_k + \varepsilon = 1$.)

Zbývá tedy dokázat, že požadované rozestavění věží lze vždy najít. Sestrojíme si k tomu pomocný bipartitní graf. Vrcholy jeho levé partity budou odpovídat řádkům matice, vrcholy pravé partity sloupcům a mezi vrcholem $i$ nalevo a $j$ napravo povede hrana právě tehdy, když $B_{i,j}$ není nulové. Číslu $B_{i,j}$ budeme říkat váha této hrany a všimneme si, že součet vah hran incidentních s libovolným vrcholem je roven 1.

Hledané rozmístění $n$ věží odpovídá perfektnímu párování v tomto grafu. Jeho existence přímočaře plyne z Hallovy věty. Vskutku – stačí ověřit Hallovu podmínku: Mějme podmnožinu $L$ levé partity a množinu $R$ jejích sousedů na pravé straně. Z množiny $L$ vycházejí hrany o celkové váze $|L|$, které tvoří podmnožinu hran o váze $|R|$ přicházejících do množiny $R$. Proto $|R| \geq |L|$.⟨4⟩ ♡

### Fordův-Fulkersonův algoritmus s nejkratšími cestami

O Fordově-Fulkersonově algoritmu na hledání maximálního toku je známo, že se pro reálné kapacity hran nemusí zastavit. Zde dokážeme, že budeme-li si v algoritmu pokaždé vybírat *nejkratší* nenasycenou cestu, algoritmus se vždy zastaví, dokonce v polynomiálním čase. Takovému algoritmu se také někdy říká Edmondsův-Karpův.

**Značení:** Síť, ve které hledáme maximální tok, označíme $(V, E, z, s, c)$, kde $V$ je množina vrcholů, $E$ množina hran, $z$ zdroj, $s$ spotřebič a $c$ funkce udávající kapacity hran. Počet vrcholů sítě označíme $n$, počet hran $m$. Pokud k nějaké hraně $uv \in E$ chybí v síti opačná hrana $vu$, doplníme ji do $E$ a přiřadíme jí nulovou kapacitu.

**Definice:** *Rezervou* hrany $uv \in E$ vzhledem k toku $f$ nazveme číslo $r(uv) = c(uv) - f(uv) + f(vu)$. [Rezerva říká, kolik jednotek toku jsme schopni poslat z $u$ do $v$, ať už zvýšením průtoku na hraně $uv$, nebo snížením na hraně $vu$.]

**Definice:** *Síť rezerv* vznikne ze sítě $(V, E, z, s, c)$ tím, že kapacity hran nahradíme jejich rezervami a smažeme hrany s nulovou rezervou.

**Algoritmus:** *(Edmondsův-Karpův)*

1. $f \leftarrow$ *nulový tok.*
2. Dokud v síti rezerv existuje cesta ze $z$ do $s$:
3. $\quad P \leftarrow$ nejkratší taková cesta.
4. $\quad \varepsilon \leftarrow \min_{e \in P} r(e)$.
5. $\quad$ Po cestě $P$ zvýšíme průtok o $\varepsilon$.

Uvažujme nyní o síti rezerv v nějakém kroku algoritmu. Každému vrcholu $u \in V$ přiřadíme jeho úroveň $\ell(u)$, což bude vzdálenost od zdroje v síti rezerv (měřená počtem

⟨4⟩ To je podobný argument, jako když se dokazuje, že regulární bipartitní graf má vždy perfektní párování. Jen namísto počítání hran vedoucích mezi množinami sčítáme jejich váhy.

hran). Všimneme si, že úroveň je buď celé číslo od 0 do $n-1$, nebo $+\infty$, pokud ze $z$ do $u$ nevede žádná cesta. Podle úrovní vrcholy rozdělíme do vrstev $L_0, \ldots, L_{n-1}, L_\infty$.

Hrany mohou vést do bezprostředně následující vrstvy (těm budeme říkat *dopředné*), uvnitř jedné vrstvy (*příčné*), případně o libovolný počet vrstev zpět (*zpětné*). Žádná hrana nevede o více než jednu vrstvu dopředu (tím bychom zkrátili nejkratší cestu).

Každá nejkratší cesta ze $z$ do $s$ začne ve vrstvě $L_0$, první hranou přejde do vrstvy $L_1$, druhou hranou do $L_2$, atd. Cesta $P$ tedy využívá pouze dopředné hrany. Pokud zlepšíme tok po $P$, mohou některé hrany cesty zmizet ze sítě rezerv (při poklesu rezervy na nulu). K nim opačným hranám se naopak rezerva zvětšuje, takže se mohou v síti rezerv nově objevit jako zpětné.

**Tvrzení:** Úroveň $\ell(u)$ libovolného vrcholu $u$ během algoritmu nikdy neklesá.

*Důkaz:* Odstraněním hrany nemůže žádná vzdálenost klesnout, přidáním zpětné hrany také ne. ♡

Nyní si všimneme, že pokaždé, když algoritmus vybere nějakou cestu $P$, nasytí alespoň jednu hranu sítě. Počet zpracovaných cest tedy můžeme shora omezit počtem všech nasycení hran. Zkusme tento počet odhadnout:

**Lemma:** Libovolná hrana $uv \in E$ se nasytí nejvýše $(1 + n/2)$-krát.

*Důkaz:* Nechť hrana $uv$ byla právě nasycena. Než se to stane příště, musí se její rezerva znovu zvýšit. K tomu ale může dojít jedině tak, že hranu použijeme v protisměru.

Při nasycení leží $u$ v nějaké vrstvě $L_i$ a $v$ v následující vrstvě $L_{i+1}$. Až po naší hraně budeme posílat tok v protisměru, bude naopak $u$ ležet ve vyšší vrstvě než $v$. Podle tvrzení úrovně vrcholů nikdy neklesají, takže aby „ocásek hrany předběhl její hlavičku“, musí se úroveň vrcholu $u$ zvýšit aspoň o 2.

Jelikož vrstev existuje nejvýše $n$, může po prvním nasycení hrany nastat nejvýše $n/2$ dalších. ♡

**Věta:** Edmondsův-Karpův algoritmus vybere $\mathcal{O}(nm)$ cest.

*Důkaz:* Síť obsahuje nejvýše $2m$ hran ($m$ původních a až $m$ doplněných v opačné orientaci), takže podle předchozího lemmatu může za celou dobu běhu algoritmu dojít jen k $\mathcal{O}(nm)$ nasycením hrany. Jelikož na každou cestu připadá alespoň jedno nasycení hrany, totéž omezení platí i pro počet cest. ♡

Drobná úprava Fordova-Fulkersonova algoritmu tedy zařídila že se na každé síti (se sebedivočejšími kapacitami) zastaví. Tím pádem v každé síti existuje alespoň jeden maximální tok.

Získali jsme ale více: efektivní algoritmus, který nám takový tok najde. Časová složitost našeho algoritmu přitom závisí pouze na velikosti grafu, nikoliv na hodnotách kapacit. Jelikož nejkratší cestu najdeme v čase $\mathcal{O}(m)$ prohledáním grafu do šířky a pak ji v tomtéž čase dovedeme nasytit, celý algoritmus doběhne v čase $\mathcal{O}(nm^2)$, tedy $\mathcal{O}(n^5)$ pro husté sítě. Existují i efektivnější metody, ale ty už jsou složitější. Dočíst se o nich můžete třeba v knížce Krajinou grafových algoritmů na `http://mj.ucw.cz/vyuka/ga/`.

## Mohutnosti množin

Nyní se vydáme na malou exkursi do hájemství nekonečné kombinatoriky. Nejprve se podíváme na zoubek tomu, jak porovnávat velikosti nekonečných množin.

**Definice:** O dvou množinách $A$, $B$ řekneme, že *$A$ je stejně mohutná jako $B$* (píšeme $A \equiv B$), pokud existuje bijekce $f : A \to B$. Dále *$A$ je nejvýše stejně mohutná jako $B$* ($A \preccurlyeq B$), pokud existuje prosté zobrazení $f : A \to B$.

Jaké vlastnosti má „relace“ $\equiv$?⟨5⟩ Jistě je reflexivní, symetrická i transitivní, takže je to ekvivalence. Podobně $\preccurlyeq$ je reflexivní a transitivní, ovšem není antisymetrická – například $\{1\} \preccurlyeq \{2\}$ a současně $\{2\} \preccurlyeq \{1\}$. Brzy dokážeme Cantorovu-Bernsteinovu větu, která nám řekne, že kdykoliv $A \preccurlyeq B$ a současně $B \preccurlyeq A$, je také $A \equiv B$.

Nejprve ale vyzkoušejme, jak se porovnávání mohutností množin chová. Pro konečné množiny dává přesně totéž jako obyčejné porovnání počtu prvků. Pro nekonečné množiny to začne být zajímavější:

- $\mathbb{N} \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$: zde poslouží bijekce $x \mapsto x + 1$.
- $\mathbb{N} \equiv \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$: bijekce $x \mapsto 2x$.
- $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{N}$: bijekce $x \mapsto 2x$ pro $x \geq 0$ a $x \mapsto -2x - 1$ pro $x < 0$ (nezáporná čísla zobrazíme na sudá, záporná na lichá).
- $\mathbb{N}^2 \equiv \mathbb{N}$: uspořádané dvojice $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ můžeme očíslovat přirozenými čísly třeba tak, že je nejdříve uspořádáme podle součtu $x + y$ a každou (již konečnou) skupinu dvojic se stejným součtem podle $x$.

Všechny tyto množiny jsou proto stejně mohutné jako přirozená čísla.⟨6⟩ Takovým množinám budeme říkat *spočetné* a všem ostatním nekonečným množinám *nespočetné.* Je známo (důkaz najdete v libovolné učebnici teorie množin), že množina všech reálných čísel je nespočetná a také že k libovolné množině najdeme nějakou, která je mohutnější (třeba její potenci).

Jak je to s racionálními čísly? Ukážeme, že jich je také spočetně mnoho: Jistě platí, že $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Q}$ (protože kdykoliv $A \subseteq B$, je také $A \preccurlyeq B$, protože identické zobrazení $x \mapsto x$ je prosté). Nahlédneme i opačnou nerovnost: $\mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{Z}^2 \equiv \mathbb{N}^2 \equiv \mathbb{N}$. Každé racionální číslo totiž můžeme zapsat zlomkem v základním tvaru, což je speciální případ uspořádané dvojice celých čísel. A jelikož $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{N}$, je i dvojic celých čísel stejně jako dvojic přirozených čísel. Z Cantorovy-Bernsteinovy věty pak plyne, že $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Q}$.

Podobně dokážeme, že všechny omezené intervaly jsou stejně mohutné jako množina $\mathbb{R}$ (pokud tedy vynecháme triviální intervaly, které jsou prázdné nebo jednoprvkové). Předně si všimneme, že libovolné dva omezené otevřené intervaly jsou

⟨5⟩ Ona to nemůže být opravdová relace – na jaké množině by byla definovaná, když množina všech množin neexistuje? V teorii množin se takové objekty dají popsat třídovými relacemi a nebo prostě logickými formulemi.

⟨6⟩ Někdy navzdory naší intuici – pro konečné množiny se nám jistě nestane, že by množina byla stejně mohutná jako nějaká její vlastní podmnožina.

stejně mohutné – jako bijekce mezi $(a,b)$ a $(x,y)$ vždy poslouží vhodná lineární funkce. Podobně libovolné dva uzavřené intervaly. Funkce $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ nám dosvědčuje, že množina $\mathbb{R}$ je stejně mohutná jako interval $(-\pi/2, \pi/2)$, a tedy i jako libovolný omezený otevřený interval.

Nyní už stačí dokázat stejnou mohutnost nějakého otevřeného intervalu s nějakým uzavřeným (zbytek zařídí transitivita). Ukažme tedy, že $[-1,1] \equiv (-1,1)$. Přímou bijekci není úplně snadné sestrojit (všimněte si, že nemůže být spojitá, jelikož pro každé spojité zobrazení platí, že vzor otevřené množiny je opět otevřená množina). My si raději opět všimneme, že platí obě nerovnosti: nerovnost $\preccurlyeq$ můžeme totiž dosvědčit funkcí $x \mapsto x/2$, opačnou nerovnost dostaneme z inkluze.

Teď už dokážeme slíbenou větu. Poněkud netradičně, totiž úvahou o vhodných nekonečných grafech.

**Věta:** *(Cantorova-Bernsteinova)* Nechť $A$ a $B$ jsou dvě množiny, pro které existují prostá zobrazení $f: A \to B$ a $g: B \to A$. Potom existuje bijekce $h: A \to B$.

*Důkaz:* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že množiny $A$ a $B$ jsou disjunktní. Kdyby nebyly, stačí „přejmenovat prvky“ vytvořením množin $A' := A \times \{0\}$ a $B' := B \times \{1\}$, které už jistě disjunktní jsou, a složením zobrazení $f, g, h$ s „přejmenovávacími bijekcemi“ $x \mapsto (x,0)$ a $y \mapsto (y,1)$.

Nuže, mějme $A$, $B$ disjunktní. Sestrojíme graf $G$, jehož vrcholy budou prvky sjednocení obou množin a hrany budou definované zobrazeními $f$, $g$ takto:

- Pokud $y = f(x)$, přidáme mezi vrcholy $x$ a $y$ *červenou hranu.*
- Pokud $x = g(y)$, spojíme $x$ a $y$ *modrou hranou.*

Každý vrchol $x \in A$ je určitě incidentní s právě jednou červenou hranou (funkce $f$ je definovaná na celé množině $A$) a s nejvýše jednou modrou hranou (funkce $g$ vede do množiny $A$ a je prostá, ovšem nemusí být na). Podobně vrcholy z množiny $B$ incidují s právě jednou modrou hranou a nejvýše jednou červenou. Všechny vrcholy tedy mají stupeň buď 1 nebo 2.

Pozor na to, že v grafu se mohou v jednom speciálním případě vyskytovat i násobné hrany: dvojice $x \in A$, $y \in B$ může být spojena současně červenou i modrou hranou; v takovém případě ovšem $x$ ani $y$ neincidují s žádnými dalšími hranami.

Uvažme, jaké komponenty souvislosti mohou mít grafy se stupni 1 a 2:⟨7⟩ V konečných grafech to jsou pouze cesty a kružnice, v nekonečných přibudou ještě jednostranně a oboustranně nekonečné cesty.

Nyní v každé z komponent souvislosti nalezneme perfektní párování:

- *konečné kružnice* – víme, že pokud s vrcholem sousedí dvě hrany, mají různé barvy, takže se na kružnici musejí pravidelně střídat červené a

⟨7⟩ Tento krok chápejme spíš intuitivně – komponenty souvislosti jsme si pro nekonečné grafy formálně nezavedli. Není to ale těžké udělat: nadefinujeme si relaci $\divideontimes$ na vrcholech tak, že $x \divideontimes y$ právě tehdy, když vede konečná cesta mezi $x$ a $y$, a dokážeme, že je to ekvivalence. Její ekvivalenční třídy pak budou kýžené komponenty.

modré hrany. Kružnice má tedy sudou délku a jak červené, tak modré hrany tvoří perfektní párování (můžeme si vybrat).

- *oboustranně nekonečné cesty* – funguje stejný argument.
- *jednostranně nekonečné cesty* – opět se musí pravidelně střídat červená s modrou, tentokrát si do $h$ vybereme tu barvu, kterou cesta začíná, aby byly všechny vrcholy spárované.
- *konečné cesty* – o těch dokážeme, že se v našem grafu nemohou vyskytnout. Nechť BÚNO cesta začíná vrcholem z $A$. Pokud z takového vrcholu vede jen jedna hrana, musí být červená. Druhý vrchol je tedy z $B$ a druhá hrana modrá. Indukcí dokážeme, že cesta končí buďto tím, že jsme přišli po červené hraně do vrcholu z $B$ nebo po modré do vrcholu z $A$. V obou případech ovšem z koncového vrcholu musí vést ještě hrana opačné barvy, což je spor s tím, že vrchol je koncový.

Sjednocením těchto párování je perfektní párování v celém grafu, které určuje hledanou bijekci $h$. ♡

## Kompaktnost v logice

Praktickým prostředkem pro studování vztahů mezi konečným a nekonečným světem se ukazuje být věta o kompaktnosti výrokové logiky. Předvedeme si její (opět kombinatorický) důkaz a ukážeme některé její důsledky pro nekonečnou kombinatoriku.

**Definice:** (neformální) Budeme uvažovat o *výrokových formulích* (zkráceně jen formulích). Ty se skládají z *proměnných* (symboly z nějaké spočetné množiny) spojených logickými spojkami ($\wedge$, $\vee$, $\neg$ apod.) a závorkami. Kdykoliv proměnné *ohodnotíme* nulami a jedničkami (nepravda, pravda), můžeme o formuli rozhodnout, zda je *pravdivá.* O formuli řekneme, že je *splnitelná,* pokud existuje ohodnocení proměnných, ve kterém je pravdivá. Podobně množina formulí je splnitelná, pokud jsou při nějakém ohodnocení pravdivé všechny její formule současně.

**Příklad:** Množina formulí $\{(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y), x \vee y\}$ je splnitelná, protože při ohodnocení $x = 0$, $y = 1$ nebo $x = 1$, $y = 0$ jsou obě formule pravdivé. Pokud bychom přidali ještě formuli $x \wedge y$, množina splnitelná nebude.

**Věta:** *(O kompaktnosti výrokové logiky, spočetná verze)* Spočetná množina formulí $\Psi$ je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná každá její konečná podmnožina.

*Důkaz:* Nejprve dokážeme jednoduché lemma o nekonečných stromech:

> **Lemma:** *(Königovo)* V každém zakořeněném stromu, který má nekonečně mnoho vrcholů, ale pouze konečné stupně, existuje nekonečná cesta začínající v kořeni.
>
> *Důkaz:* Pro každý vrchol $v$ označíme $T(v)$ podstrom obsahující všechny (i nepřímé) potomky vrcholu $v$. Cestu $v_0, v_1, \ldots$ budeme budovat indukcí tak, aby pro každé $i$ byl strom $T(v_i)$ nekonečný. Počáteční vrchol $v_0$ umístíme do kořene, $T(v_0)$ je celý strom a ten nekonečný jistě je. Nechť nyní máme sestrojeny vrcholy $v_0, \ldots, v_i$. Pokud ze stromu $T(v_i)$ odstraníme

vrchol $v_i$, rozpadne se nám na komponenty $T(w_1), \ldots, T(w_k)$, kde $w_1$ až $w_k$ jsou synové vrcholu $v_i$. Jelikož sjednocením konečně mnoha konečných množin je vždy konečná množina a $T(v_i)$ je nekonečný, musí být aspoň jeden z podstromů $T(w_j)$ nekonečný. Cestu necháme pokračovat do tohoto podstromu, tedy položíme $v_{i+1} = w_j$. ♡

Množina formulí $\Psi$ je spočetná, takže můžeme formule očíslovat přirozenými čísly (těmto číslům budeme říkat *indexy* formulí). Stejně můžeme přidělit indexy všem proměnným. Podle indexů nyní všechny formule zařadíme do množin $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ tak, že v $\Psi_i$ leží ty formule, jejichž index je menší než $i$ a které současně obsahují jen proměnné s indexy menšími než $i$. Povšimneme si, že $\emptyset = \Psi_0 \subseteq \Psi_1 \subseteq \Psi_2 \subseteq \ldots$ a že každá formule do některé množiny $\Psi_i$ padne.

Nyní sestrojíme spočetný úplný binární strom $T$ – na nulté hladině leží kořen, na první dva jeho synové, na druhé čtyři jejich synové, obecně na $i$-té hladině se nachází $2^i$ vrcholů.

Každé hladině nyní přiřadíme formule: $i$-té hladině množinu $\Psi_i$. Každý z vrcholů na této hladině hladině je jednoznačně určen cestou z kořene, tedy posloupností kroků „doleva“ a „doprava“ délky $i$. Tuto cestu si vyložíme jako ohodnocení proměnných s indexy $0, \ldots, i-1$ (to jest těch, které se mohou vyskytnout ve formulích z množiny $\Psi_i$). Pak se podíváme, zda jsou všechny formule z $\Psi_i$ v tomto ohodnocení pravdivé, a pokud nikoliv, vrchol smažeme. (Všimněte si, že z tohoto pravidla ihned plyne, že pokud je nějaký vrchol smazán, všechny jeho potomky smažeme také. Pokud totiž nějaká množina formulí při daném ohodnocení není celá pravdivá, nebude celá pravdivá ani žádná její nadmnožina při ohodnocení, které je rozšířením předchozího o další proměnné.)

Nahlédneme, že nám musel zbýt nekonečný strom: Kdyby byl konečný, musí existovat hladina, ze které nezbyly žádné vrcholy. Jinými slovy množina $\Psi_i$ (což je nějaká konečná množina formulí) není pravdivá při žádném ohodnocení proměnných, a tedy není splnitelná. To je spor s předpoklady věty.

Na tento nekonečný strom teď použijeme Königovo lemma. Podle něj ve stromu existuje nekonečná cesta vedoucí z kořene. Té můžeme přiřadit ohodnocení všech proměnných. V tomto ohodnocení je určitě pravdivá každá formule $\varphi \in \Psi$. Stačí si uvědomit, že $\varphi \in \Psi_i$ pro nějaké $i$. A jelikož $i$-tou hladinou stromu nalezená cesta prochází, musí být $\varphi$ při ohodnocení prvních $i$ proměnných podle této cesty splněna. ♡

## Kompaktnost v kombinatorice

Pomocí kompaktnosti logiky můžeme snadno dokázat třeba následující větu o barvení nekonečných grafů:[8]

[8] My ji vyslovíme pro spočetné grafy, protože jsme větu o kompaktnosti dokázali pouze pro spočetné množiny formulí, ale vše platí i v nespočetném světě. Tam se ovšem není radno pohybovat bez řádně vybudovaných základů množinové teorie.

**Věta:** Spočetný graf $G$ je možno obarvit $k \in \mathbb{N}$ barvami, právě když je možné $k$ barvami obarvit každý jeho konečný podgraf.

*Důkaz:* Implikace zleva doprava je triviální: jakmile jde nějaký graf obarvit $k$ barvami (budeme říkat, že je $k$-obarvitelný), totéž obarvení funguje i pro všechny jeho podgrafy. Opačnou implikaci dokážeme obměnou (pokud $G$ nelze $k$-obarvit, pak má nějaký konečný podgraf, který také není $k$-obarvitelný).

Obarvitelnost libovolného grafu $H = (V, E)$ můžeme přeložit na splnitelnost vhodného systému formulí $\mathcal{F}(H)$. Pro každý vrchol $v \in V$ a každou barvu $b \in \{1, \ldots, k\}$ zavedeme proměnnou $c_{v,b}$, která bude udávat, že vrchol $v$ byl obarven barvou $b$. Ne každé ohodnocení proměnných samozřejmě popisuje korektní obarvení. Proto do $\mathcal{F}(H)$ přidáme následující formule zajišťující konsistenci:

$$\begin{aligned}
c_{v,1} \vee c_{v,2} \vee \ldots \vee c_{v,k} &\quad \text{pro } v \in V \text{ (každý vrchol má alespoň 1 barvu)} \\
c_{v,i} \Rightarrow \neg c_{v,j} &\quad \text{pro } v \in V \text{ a } 1 \leq i < j \leq k \text{ (každý vrchol má nejvýše 1)} \\
c_{v,i} \Rightarrow \neg c_{w,i} &\quad \text{pro } \{v, w\} \in E \text{ (sousední vrcholy nemají stejnou barvu)}
\end{aligned}$$

Snadno vidíme, že tyto formule jsou všechny najednou splnitelné právě tehdy, pokud existuje $k$-obarvení grafu $H$.

Pokud tedy zadaný graf $G$ není $k$-obarvitelný, množina $\mathcal{F}(G)$ nemůže být splnitelná, takže podle věty o kompaktnosti musí existovat její konečná podmnožina $K$, která také není splnitelná. Každá z formulí, které jsme do $\mathcal{F}(G)$ umístili, se ovšem týká nějakého vrcholu nebo hrany, takže musí existovat konečný podgraf $H \subset G$, který obsahuje všechny vrcholy a hrany, o nichž se formule v $K$ zmiňují. Proto $K \subseteq \mathcal{F}(H)$. Nadmnožina nesplnitelné množiny samozřejmě musí být zase nesplnitelná, takže tento podgraf $H$ nemůže být $k$-obarvitelný. ♡

Podobně můžeme dokázat spočetnou verzi Hallovy věty, ovšem pouze pro nekonečné systémy konečných množin – jakmile bychom povolili i nekonečné množiny, věta nemůže platit. To ukazuje třeba systém $(\mathbb{N}, \{\mathbb{N}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots\})$, který evidentně nemá žádný SRR, i když Hallovu podmínku splňuje.

**Věta:** *(spočetná Hallova)* Buď $(X, \mathcal{S})$ množinový systém obsahující spočetně mnoho konečných množin. Pak $(X, \mathcal{S})$ má SRR právě tehdy, když pro libovolný podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ s konečně mnoha množinami platí Hallova podmínka.

*Důkaz:* Budeme dokazovat ekvivalentní tvrzení, totiž že $(X, \mathcal{S})$ má SRR právě tehdy, když ho má každý konečný podsystém. Opět problém přeložíme na splnitelnost výrokových formulí.

Množinovému systému $(Y, \mathcal{T})$ [kde BÚNO $Y = \bigcup \mathcal{T}$] přiřadíme množinu formulí $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ takto: Pro každou množinu $M \in \mathcal{T}$ a prvek $x \in M$ zavedeme proměnnou $r_{M,x}$, která bude udávat, že prvek $x$ byl vybrán za reprezentanta množiny $M$. Pak přidáme formule zajišťující konsistenci:

$$\begin{aligned}
r_{M,x_1} \vee r_{M,x_2} \vee \ldots \vee r_{M,x_k} &\quad \text{pro } M = \{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathcal{T} \\
r_{M,x} \to \neg r_{M,y} &\quad \text{pro } M \in \mathcal{T},\ x, y \in M,\ x \neq y \\
r_{M,x} \to \neg r_{N,x} &\quad \text{pro } M, N \in \mathcal{T},\ M \neq N,\ x \in M \cap N
\end{aligned}$$

Formule těchto tří druhů říkají po řadě, že každá množina má alespoň jednoho reprezentanta, že každá má také nejvýše jednoho, a že žádný prvek není reprezentantem dvou množin. (Mimochodem, formule druhého druhu bychom ani nepotřebovali – vybrat z jedné množiny více reprezentantů není na škodu.)

Znovu je implikace zleva doprava triviální a tu druhou dokážeme obměnou. Nechť tedy $\mathcal{S}$ nemá SRR. Pak není množina formulí $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ splnitelná, a tudíž (opět kompaktnost...) ma nějakou konečnou nesplnitelnou podmnožinu $K$. Takže musí existovat konečný podsystém $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, pro nějž $K \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{T})$. Tedy $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ je nesplnitelná a $\mathcal{T}$ nemá SRR. ♡