Dynamizace datových struktur

Velmi obecně: Máme nějakou DS a chceme, aby se chovala "dynamicky" (třeba úplně statická → dynamická s Insertem a Deletem)

Úplný rebuild (přestavba):
- jednou za čas přebudujeme celou strukturu
- tím řešíme omezenou kapacitu (pole, intervalové stromy, v $\mathbb{E}^k$, ...) nebo třeba změny parametrů (bloky velikosti ~ log n u indirekce) či "zarovnání" struktury sousedící prvky
- strukturu velikosti n přebudujeme za $\mathcal{H}(n)$ operací → $T(n)/n$ na prvek amort.

[předpokládáme $T(O(n)) = \mathcal{C}(T(n))$]

Částečný rebuild ... příklad: vyhledávací stromy – dokonale vyvážený strom umíme postavit v $O(n)$ ze setříděné posl., ale nelze ho dynamicky udržovat

Def: BB-α strom ≡ BVS, v každém vrcholu v:

$$|T(\ell(v))| \le \alpha \cdot |T(v)|$$
$$|T(p(v))| \le \alpha \cdot |T(v)| \quad \text{pro } \tfrac{1}{2} < \alpha < 1$$

Vede na hloubku $\le \log_{\frac{1}{1-\alpha}} n$ ... kontrola: udržují počítadla $|T(v)|$ ve vrcholech

Strategie: Po Ins/Del přepočítám počítadla na cestě do kořene & kontroluji vyváženost

Pokud ∃ nevyvážený vrchol, vezmu nejvyšší, vše pod ním rozeberu a postavím znovu dokonale vyvážené.

Intuice: Rebuild stojí $\mathcal{H}(k)$ pro podstrom velikosti k, než nastane znovu, musí v podstromu nastat $\Omega(k)$ operací } $O(1)$/op.
... ∀ prvek si předplatí rebuild všech nadřazených kořenů → $O(\log n)$/op.

Analýza: $\varphi(v) := \begin{cases} \big||T(\ell(v))| - |T(p(v))|\big| & \text{pokud vyjde} \ge 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ } v dokonale vyváženém stromu všude 0

$\Phi := \sum_v \varphi(v)$

Ins/Del mění $\varphi(v)$ o $C(1)$ v $O(\log n)$ vrcholech ⇒ stojí $O(\log n)$

vyvážení podstromu $T(v)$ o k prvcích ... $\varphi(v) \ge \Omega(k)$ ⇒ Φ klesne o $\Omega(k)$

→ vyvážení zaplatíme z potenciálu

Věta: V BB-α stromu o n vrcholech trvá Find $O(\log n)$ w.c., Ins/Del $O(\log n)$ amort.

Dynamizace 2D intervalových stromů

- primární i sekundární stromy jsou BB-α
  - rebuild primárního stojí $\mathcal{H}(k \log k)$ → musím spořit $\Omega(\log k)$/prvek
  - rebuild sekundárního stojí $\mathcal{H}(k)$, ale ∀ prvek leží v $O(\log n)$ takových → také $\Omega(\log k)$/prvek

⇒ amort. složitost Ins/Del je $O(\log^2 n)$

} pro d-dim. vyjde $O(\log^d n)$ amort. Ins/Del & Find zůstává

Obecná (semi) dynamizace

↳ jen Insert

spíš $\binom{U_x}{<\omega}$ ... jen konečné

Def: Vyhledávací problém je $f: U_Q \times (2^{U_x}) \to U_R$

- U_Q ... universum dotazů
- 2^{U_x} ... universum prvků
- U_R ... universum výsledků

Def: V.p. f je rozložitelný $\equiv \exists \sqcup: U_R \times U_R \to U_R$ vyčíslitelná v čase $O(1)$ tož.

$\forall A, B \subseteq U_x,\ A \cap B = \emptyset\ \forall q \in U_Q \quad f(q, A \cup B) = f(q,A) \sqcup f(q,B)$

Příklady: "$q \in X$" } jsou rozložitelné
nejbližší bod X ke q v $\mathbb{R}^d$ } jsou rozložitelné
$q \in \text{conv}(X)$ } není

... $U_x = \mathbb{Z}$, $U_Q = \mathbb{Z}$, $U_R = \{0,1\}$
... $U_x = U_Q = \mathbb{R}^2$, $U_R = \mathbb{R}^2$
... $U_x = U_Q = \mathbb{R}^2$, $U_R = \{0,1\}$

Mějme statickou strukturu pro f ... $B_S(n)$ – čas na build
$Q_S(n)$ – čas na dotaz
$S_S(n)$ – prostor

} předpokládáme, že $Q_S(n)$, $\frac{B_S(n)}{n}$, $\frac{S_S(n)}{n}$ jsou rozložitelné

Chceme (semidynamickou ... $Q_D(n)$, $S_D(n)$ ... čas na dotaz, prostor
$I_D(n)$, $D_D(n)$ ... amort. čas na Insert, Delete

Konstrukce: Množinu rozložíme na bloky $B_0, B_1, \dots$ takové, že $\forall i\ |B_i| \in \{0, 2^i\}$ } # bloků $\le \log n$
↳ pro $\forall$ blok umím statickou strukturu
$\Rightarrow$ velikost $n = |X|$ nám jednoznačně určuje, jaké bloky jsou neprázdné (bin. zápis)

Dotaz: Položím dotaz všem blokům, odpovědi zkombinuji

Trvá $\sum_{\substack{i \in I \\ \text{tj. } B_i \neq \emptyset}} Q_S(2^i) \in O(Q_S(n) \cdot \log n)$

Prostor: $\sum_{i \in I} S_S(2^i) = \sum_i \underbrace{\frac{S_S(2^i)}{2^i}}_{\le \frac{S_S(n)}{n}} \cdot 2^i \le n \cdot \frac{S_S(n)}{n} = S_S(n).$

Insert: Jako přičítání ve dvojkové soustavě ... nechť j je min. takové, že $B_j = \emptyset$

Rozeberu $B_0 \dots B_{j-1}$, přidám nový prvek, vytvořím novou B_j

$2^0 + \dots + 2^{j-1} + 1 = 2^j$

B_j přebudováváme nejvýše jednou za 2^j kroků

$\Rightarrow$ amort. cena vyjde $\le B_S(2^j) / 2^j \le \frac{B_S(n)}{n}$

} $\forall$ prvek předplatí $O\left(\frac{B_S(n)}{n} \cdot \log n\right)$

Věta: ... existuje semidynamická struktura s parametry

$Q_D(n) = O(Q_S(n) \cdot \log n)$

$S_D(n) = O(S_S(n))$ ... hodí se udržovat kopie prvků (nemusíme rozebírat)

$I_D(n) = O\left(\frac{B_S(n)}{n} \cdot \log n\right)$

Příklady:

- binární vyhledávání → obecná množina
  - Build $\mathcal{O}(n \log n)$, dotaz $\mathcal{H}(\log n)$, prostor $\mathcal{O}(n)$
  - dotaz $\mathcal{H}(\log n)$, prostor $\mathcal{O}(n)$, Insert $\mathcal{H}(\log^2 n)$ ← lze zrychlit: místo rebuildu Merge v $\mathcal{O}(n)$ ⇒ $\mathcal{O}(\log n)$ amort.
- též není těsné, pokud $B_S(n) = O(n^\varepsilon)$ ... tehdy log zmizí a $T_D(n) = O(n^\varepsilon)$
- pro 2D intervalové stromy: build $\mathcal{H}(n \log n)$, dotaz $\mathcal{H}(\log^2 n)$, prostor $\mathcal{H}(n \log n)$ → Insert $\mathcal{H}(\log^2 n)$, dotaz $\mathcal{H}(\log^2 n)$, prostor $\mathcal{H}(\log n \log n)$

Worst-case semidynamizace

Myšlenka: rebuild rozložíme mezi více operací, pokaždé provedeme kousek
... ale mezitím musí původní struktury stále existovat a odpovídat na dotazy

Pro každý řád bloku použijeme až 4 bloky: $B_i^1, \dots, B_i^3$ hotové (odpovídají na dotazy)
B_i^* rozdělaná (sjednocení nějakých dvou B_{i-1}^2, B_{i-1}^3)

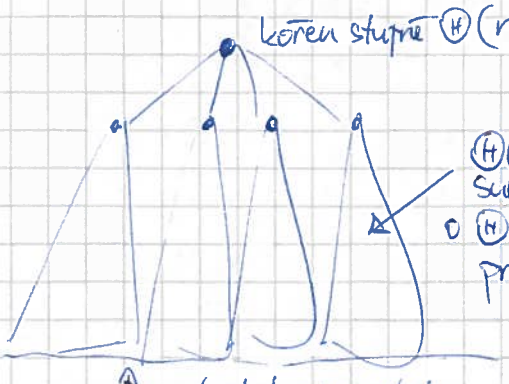
- jakmile se sejdou 2 hotové bloky téhož řádu i, spustíme build B_{i+1}^*, poběží 2^{i+1} kroků. Až doběhne, původní bloky zrušíme.
- nikdy nevzniknou víc než 3 bloky téhož řádu

⇒ Insert v $O(B_S(n)/n \cdot \log n)$ w.c.
dotaz ani paměť se asymptoticky nezhorší

Dále se umí:
- plná dynamizace – statická struktura musí umět "škrtat prvky" – jednou za čas úplný rebuild
- worst-case plná dynamizace

Exponenciální stromy

- technika vhodná k dynamizaci Fusion Trees a spol.
- mějme statickou strukturu pro hledání následníka s $B_S(n) \in O(n^{k-1})$ pro nějaké $k \geq 2$ a nějakým $Q_S(n)$ v prostoru $S_S(n) \in O(n^{k-1})$
- vyrobíme násl. strom



v listech jsou data
+ spoj. seznam všech listů

- každý vrchol si pamatuje oddělovač

v_i má oddělovač s_i
v_{i+1} s_{i+1}
listy v $X_i \subseteq [s_i, s_{i+1})$
a oddělovače

& oddělovač vrcholu = oddělovač jeho levého syna (vnitř.)
[pozor, v listech nemusí být oddělovač = prvek!]

- vrchol si pamatuje oddělovače synů ke statické struktuře

Dotaz: Řídíme se podle oddělovačů, procházíme shora dolů, v listu $\neq 1$ spojdeem

$$Q_D(n) \leq O(Q_S(O(n^{1/k}))) + Q_D\left(O\left(n^{\frac{k-1}{k}}\right)\right)+1$$

chceme se zbavit O-ček uvnitř → jednou dosadíme do sebe sama

$$\leq \underbrace{O(Q_S(O(n^{1/k})))}_{\leq n \text{ pro dost velké } n} + \underbrace{O(Q_S(O(n^{\frac{k-1}{k}})))}_{\text{taktéž}} + Q_D\left(O\left(n^{\left(\frac{k-1}{k}\right)^2}\right)\right)+1$$

$$O(Q_S(n)) \qquad O(Q_S(n))$$

pro dost velké n je $O(n^{\left(\frac{k-1}{k}\right)^2}) \leq n^{\frac{k-1}{k}}$

$$\Rightarrow \leq Q_D(n^{\frac{k-1}{k}})$$

$$\leq O(Q_S(n)) + Q_D\left(n^{\frac{k-1}{k}}\right)$$

Pamět': $S_D(n) \leq O(\underbrace{(n^{\frac{1}{k}})^{k-1}}_{n^{\frac{k-1}{k}}}) + \sum_i S_D(n_i)$

$\sum_i n_i = n$, $\forall i\ n_i \in \Theta(n^{\frac{k-1}{k}})$

$\Rightarrow S_D(n) \in O(n)$ ... na každé úrovni $\Theta(n^{\frac{k-1}{k}})$, úrovní je jistě $O(n^{\frac{1}{k}})$

... čas na kompletní konstrukci vyjde stejně

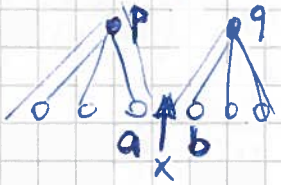
↳ tohle není tak triviální, ale čas na hladinu směrem dolů exponenciálně roste ⇒ dominují listy a těch je $O(n)$.

Delete: prvek smažeme ... problém:

↳ mažeme 1. syna → museli bychom změnit oddělovač v otci ... tak ho předáme ze synovi

\+ # synů může vyjet z povoleného rozsahu → pozdější

Insert: najdeme předchůdce & následníka ...



p, q mohou být stejné

- buď $x <$ oddělovač(b) ⇒ přidám pod **p** za **a**, $odd(x) \leftarrow x$
- nebo $x \geq odd(b)$ ⇒ přidám pod **q** před **b** (ale $x < b$)
  $odd(x) \leftarrow odd(b)$
  $odd(b) \leftarrow b$

} nikdy nemění oddělovač v otci

↳ přebudují stat. strukturu v otci, ale ta je těsně nad listy zanedbatelně velká

Rebalance: Velikost podstromu může opustit povolený rozsah $\Theta(c \cdot i)$
→ řeším rozpůlením/přerozdělením/slitím (à la indirekce)

- v daném místě (struktura velikosti t, substruktury velikosti $\Theta(t^{\frac{k-1}{k}})$)
  to nastane za $\Omega(t^{\frac{k-1}{k}})$ operací Ins/Del
  a rebuild stojí $O(t^{\frac{k-1}{k}})$ za podstrukturu + $\underbrace{O((t^{\frac{1}{k}})^{k-1})}_{O(t^{\frac{k-1}{k}})}$ za stat. strukturu v kořeni

$$= O(t^{\frac{k-1}{k}})$$

- ∀ Ins/Del si předplatí toto na všech úrovních
  ⇒ omezeno stejnou rekurencí jako $Q_D(n)$

Důsledek: Exponenciální strom zabere prostor $S_D(n) = \Theta(n)$,
hledá v čase dle rekurence $Q_D(n) = O(Q_S(n)) + Q_D(n^{\frac{k-1}{k}})$ u. c.
ukládá/maže v $Q_D(n)$ amort.,
sestrojit jde v $\Theta(n)$.

↘ umí se i worst-case verze, je (jako obvykle) výrazně složitější

Použití: • Pro Fusion Tree $B_S(n) = O(n^4) \Rightarrow k = 5$
$Q_S(n) = O\left(\frac{\log n}{\log w}\right)$

$$\Rightarrow Q_D(n) = O\left(\frac{\log n}{\log w}\right) + Q_D(n^{\frac{4}{5}})$$

$$\Rightarrow Q_D(n) = \sum_{i \geq 0} \frac{\log(n^{(\frac{4}{5})^i})}{\log w} = \sum_{i \geq 0} \frac{(\frac{4}{5})^i \log n}{\log w} = O\left(\frac{\log n}{\log w}\right)$$

pro setříděné pole s bin. searchem vyjde $O(\log n)$ ☺

• Pro vEB-like strukturu $k = 2$, $Q_S = O(\log \log n) \Rightarrow Q_D(n) = O(\log^2 \log n)$

Persistence

Možnosti: • efemérní (pomíjivá) struktura – pokaždé nevratně mění stav

• semipersistentní – pamatuje si historii
– update vytvoří novou verzi
– dotaz pokládáme libovolné verzi

• plně persistentní – máme dovoleno upravovat historické verze
→ historie tvoří strom

• funkcionální (bez side-efektů) – co jsme zapsali, nikdy nepřepíšeme
– to jsi koukni i při paralelním programování

Příklady:

• srůstající seznamy s přidáváním na začátek → funkcionální; $O(1)$ paměti na verzi

• vyhledávací stromy s kopírováním cesty → funkcionální

- $O(\log n)$ času na dotaz i úpravu
- $O(\log n)$ prostoru na verzi (rozmyslet vyvažování)

↳ kopírujeme cestu do kořene ↳ rotace "blízko" cesty → navíc zkopírujeme $O(\log n)$ vrcholů

Aplikace: Lokalizace bodu v rovině via zametání

Model: Pointerové datové struktury

- tvořené krabičkami, v každé $O(1)$ dat + $O(1)$ ukazatelů → orient. graf
- "držátka" – $O(1)$ ukazatelů zvenku
- dotaz – začneme držátky, chodíme po pointerech do dalších krabiček
- update – jako dotaz + modifikace některých navštívených krabiček
+ založení nových krabiček

Pro semiperzistenci: • stačí uchovávat jen to, co je třeba k hledání
... např. u AVL-stromů ukazatele a klíče, ale už ne znaménka
} → strukturální změny

- ukážeme, jak 1 strukt. změnu uložit v čase a prostoru $O(1)$ amort., přičemž dotazy zpomalíme jen $O(1)$-krát
- Příklad: (2,4)-strom provede amort. $O(1)$ strukt. změn na update
  → persist. strom s časem $O(\log n)$ w.c. na dotaz
  $O(\log n)$ amort. na update
  a prostorem $O(1)$ amort. na verzi

potenciál uzlu = 0 klíčů → 2
1 → 1
2 → 0
3 → 2
4 → 4

Ins/Del stojí přímo $O(1)$
štěpení: 4 klíče → 2 + 1 + 1 nahoru (Φ: 4 → 0+1+max.2)
sloučení: 0 klíčů + 1 klíč + 1 shora → 2 (Φ: 2+1 → 0+max.2)
půjčení: tím skončíme, takže určitě platí $O(1)$

„Tlusté" uzly

- každý uzel si pamatuje všechny změny ukazatelů i dat
  ⇒ vyhledávací strom indexovaný verzí (to bude číslo)
- verze stojí $O(1)$ prostoru, ale operace jsme zpomalili $O(\log h)$-krát pro historii délky h
  ↳ určitě zlepšit na $\log\log h$ pomocí vět (alespoň randomizované)

Zkrácení tlustých uzlů s kopírováním [Driscoll, Sarnak, Sleator, Tarjan 1986]

- funguje, pokud $\forall v: \deg^m(v) \le p \in O(1)$
- uzel si pamatuje základní verzi (celou) + $e \ge p$ extra pointerů (slotů) (krabička)
  (trojice (index, verze, kam))
- kdykoli měníme pointer a je volný extra slot, využijeme ho [pointer téže verze určitě přepsat přímo]
- jinak (došlo místo nebo měníme data) zkopírujeme uzel → update až p pointerů v předchůdcích
  (pozor, musíme je zjistit → zpětné pointery)

Amortizace: $\varphi(v)$:= # využitých slotů [může být $e+1$, pokud uzel právě přetekl]
$\Phi = \sum_v \varphi(v)$ přes v dosažitelné v aktuální verzi

- změna hodnoty dat či pointeru stojí $O(1)$
- kopírování při přetečení: $\varphi(v)$ byl $e+1 \ge p+1$ ⇒ 1 spotřebuji, dalších $\le p$ dám předchůdcům
  + starý uzel přestane být dosažitelný

Detaily:

- verze číslujeme přir. čísly
- krabička: – počáteční verze
  – počáteční stav dat i pointerů
  – pointer na nejbližší novější instanci (v nejnovější verzi struktury)
  – pointery na předchůdce (zpětné) – žádné spec. pořadí, p ks.
  – e slotů na novější verze pointerů
- pro t verzí hodnoty „držátek" ... $O(1)$ prostoru na verzi

všechny instance tvoří spoják setříděný dle verzí
- při update se nám určitě stačí zaměřit pointer ve uzlu, který už byl zkopírován
  [někdy nekopírujeme tentýž uzel 2× za update]

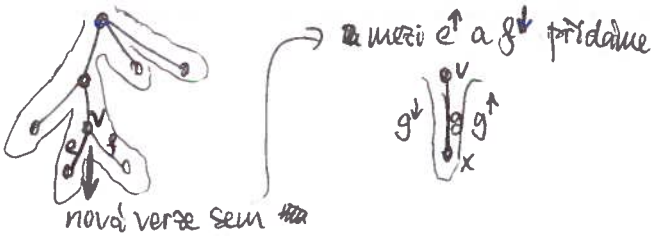
Invariant: Pointery verze v vedou na instance uzlů, které obsahují verzi v. } dočasně narušeno

Důsledek: $O(1)$ amort. času i prostoru na verzi, $O(1)$ w.c. na 1 krok hledání

Stručně o plné persistenci

Problémy: ① musíme vyjít z worst-case struktury (jinak rozbijeme amortizaci)
② musíme verzovat vše ... u Č-Č stromů barvy → zavedeme rozdílové ukládání → $O(1)$ u.c. změn/op.

③ přestane existovat lin. uspoř. na verzích ... místo toho strom verzí (částečné uspoř.)
→ "obejdeme strom po obvodu" – zároveň průchodu DFS po hranách
- směrem dolů provedeme změnu
- směrem nahoru provedeme opačnou



potřebujeme reprezentovat seznam, umět vkládat a porovnávat polohy (List Order Problem)
- obojí se umí v $O(1)$, dokonce u.c. (viz předtím)

Tlusté vrcholy → opět strom verzí, ale klíče jsou implicitní (via List Order)
stále $O(1)$ prostoru na verzi a zpomalení $O(\log n)$.

Struktura se sloty: [též Driscoll et al. 1986]

- předchůdce musíme verzovat
- pokud vrcholy mají $\leq p$ předchůdců a $\leq d$ následníků, volíme # slotů $e \geq 2d + 2p$
- $\varphi(v) = \max(0, \#\text{využitých slotů} - e/2)$, $\Phi = \sum_v \varphi(v)$ (tentokrát přes všechny vrcholy)
- po přetečení vrchol dělíme na 2 části (volbou vhodné hraniční verze)
  - oba nové vrcholy mají $\varphi = 0$
  - předtím bylo $\varphi \geq e, +1 - e/2 \geq d+p+1$
    ↳ 1 spotřebujeme, $d+p$ předáme okolním vrcholům
- detaily značně trikové

→ opět $O(1)$ času a prostoru amort. na verzi, zpomalení $O(1)$ u.c.
→ umí se i u.c. verze se vším $O(1)$

Další persist. struktury:

- pole s $O(\log \log n)$ času na operaci (to je optimální!), $O(1)$ prostoru na verzi (vše amort., random.)
  - y-fast strom verzí v # položce pole
  - semipersistentně snadné, s plnou persistencí se musí vyřešit přečíslovávání v List Orderu

[Viz disertace Milana Straky]