0. Hales-Jewettova věta

Martin Mareš, únor 2008

Tento textík je můj pokus o převyprávění a „pogeometričtění" Shelahova důkazu Hales-Jewettovy věty, který jsem se naučil z Juknovy knížky Extremal Combinatorics.

Základní pojmy: Označme si A množinu $\{0, 1, \ldots, a-1\}$. Její k-té kartézské mocnině A^k budeme říkat k-rozměrná *krychle* nad A. Každý bod $x \in A^k$ pak můžeme popsat k-znakovým *řetězcem* nad abecedou A. Pokud do abecedy přidáme ještě symbol $*$ *(žolík)*, můžeme se na řetězec $\alpha \in (A \cup \{*\})^k$ dívat jako na funkci $\alpha : A \to A^k$ takovou, že $\alpha(t)$ je slovo vzniklé ze slova α nahrazením všech výskytů hvězdičky hodnotou t. Takovému slovu (a také příslušné funkci) budeme říkat *kořen.* Podobně si zavedeme *multikořen:* to je slovo s více druhy hvězdiček $*_1, \ldots, *_\ell$ a odpovídá mu funkce $\alpha(t_1, \ldots, t_\ell) : A^\ell \to A^k$ dosazující t_i na místo $*_i$.

V krychli A^k nás budou zajímat *kombinatorické přímky* (přívlastek kombinatorické budeme většinou vynechávat). Každá přímka je jednoznačně určena nějakým kořenem α a obsahuje body $L_\alpha = \{\alpha(0), \ldots, \alpha(t-1)\}$. Jinými slovy $L_\alpha = \alpha[A]$, takže kořen vlastně funguje jako vnoření kanonické přímky $\{0, \ldots, a-1\}$ do krychle. Podobně můžeme zavést kombinatorické roviny a obecně ℓ-dimenzionální podkrychle. Každá taková je určena multikořenem α s ℓ druhy hvězdiček a obsahuje body $\alpha[A^\ell]$, čili je to opět vnoření krychle A^ℓ do A^k.

Věta (Hales-Jewettova): Pro každé a (délka hrany krychle) a r (počet barev) existuje $N = \mathrm{HJ}(r, a)$ takové, že obarvíme-li body krychle A^N pomocí r barev, vždy existuje jednobarevná kombinatorická přímka.

Důkaz: Fixujeme počet barev r a budeme postupovat indukcí podle a. Pro $a = 1$ je tvrzení věty triviální, zbytek večera věnujeme na indukční krok: již máme $n = \mathrm{HJ}(r, a-1)$, chceme nalézt (a hlavně ukázat, že existuje) $N = \mathrm{HJ}(r, a)$.

Kam míříme: Potřebujeme si pořídit krychli s o jedničku kratší hranou, abychom mohli použít indukci. Proto ze zadané krychle „sloupneme slupku" (odstraníme všechny body, jejichž některá souřadnice je nulová) a aplikujeme indukční předpoklad na oloupanou krychli. Indukce nám najde jednobarevnou přímku délky $a-1$, my ji potřebujeme rozšířit na délku a. To samozřejmě obecně nemusí jít, proto předem zařídíme, aby slupka byla obarvena stejně jako body, které leží „těsně pod ní". To zajistíme tak, že místo celé původní krychle budeme loupat nějakou její vhodnou podkrychli. Na to se nám bude hodit následující pomocné tvrzení.

Definice: Body $x, y \in A^n$ nazveme *sousední,* pokud existuje souřadnice i taková, že $x_i = 0$ a $y_i = 1$ a ve všech ostatních souřadnicích je $x_j = y_j$. O obarvení χ' n-rozměrné podkrychle $\alpha[A^n]$ budeme říkat, že je *konsistentní,* pokud pro každé dva sousední body $x, y \in A^n$ platí, že $\chi'(\alpha(x)) = \chi'(\alpha(y))$.

Tvrzení: Existuje N takové, že pro každé obarvení $\chi : A^N \to [r]$ existuje podkrychle $\alpha[A^n] \subset A^N$ obarvená konsistentně.

Než tvrzení dokážeme (a ukážeme, kolik musí být N), rozmyslíme si, jak ho použít ke kýženému indukčnímu kroku.

Nastavíme N podle tvrzení. Nepřítel nám zadá nějaké obarvení $\chi : A^N \to [r]$. My podle tvrzení nalezneme podkrychli $\alpha[A^n]$ obarvenou konsistentně a, jak za chvíli ukážeme, najdeme jednobarevnou přímku v této podkrychli. Jelikož každá taková přímka je současně jednobarevnou přímkou v A^N, indukční krok bude hotov. Všimněme si, že se stačí omezit na samotnou A^n a vůbec neuvažovat její vnoření do velké krychle (vnoření určuje obarvení krychle A^n a překládá přímky v A^n na stejně obarvené přímky v A^N).

Máme tedy krychli A^n a nějaké její konsistentní obarvení. Tuto krychli omezíme na $\{1, \ldots, a\}^n$ („oloupeme ji") a použijeme na ni indukční předpoklad (v souřadnicích posunutých o 1, ale to je pouze formální rozdíl). Indukce nám zaručuje existenci jednobarevné přímky $L_\beta = \{\beta(1), \ldots, \beta(a)\}$ v oloupané krychli. Bod $\beta(0)$ ovšem musí mít stejnou barvu jako $\beta(1)$, protože tyto dva body se mohou lišit pouze změnou nulových souřadnic na jedničky, takže jsou buďto přímo sousedi, nebo z jednoho do druhého lze přes sousedy přejít. Nyní stačí použít konsistenci obarvení a získat tak jednobarevnou přímku v celé krychli A^n.

Důkaz tvrzení: Multikořen α, který určuje hledanou podkrychli, budeme hledat ve speciálním tvaru. Bude se skládat z bloků $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ položených za sebe, přičemž blok α_i bude mít délku N_i a budou se v něm nacházet výhradně hvězdičky i-tého typu (a konkrétní hodnoty souřadnic). Parametry N_i přitom nastavíme následovně:

$$N_1 = r^{a^n}, \qquad N_i = r^{a^{\left(n + \sum_{j=1}^{i-1} N_j\right)}}.$$

Hledaná dimenze N pak bude přirozeně součet $N_1 + \ldots + N_n$.

Dostali jsme tedy nějaké obarvení $\chi : A^N \to [r]$ a chceme sestrojit bloky $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hledaného multikořene. Budeme je konstruovat zpětnou indukcí. Začneme prázdnou posloupností bloků. Když pak budeme mít hotové bloky $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ a budeme chtít sestrojit blok α_i, budeme postupovat následovně. Označíme si $M = N_1 + \ldots + N_{i-1}$ a uvážíme funkce $\chi_0, \ldots, \chi_{N_i} : A^{M+n-i} \to [r]$ definované takto:

$$\chi_t(x_1 \ldots x_M y_{i+1} \ldots y_n) = \chi(x_1 \ldots x_M 0^t 1^{N_i - t} \alpha_{i+1}(y_{i+1}) \ldots \alpha_n(y_n)).$$

(Funkce χ_t popisuje barvy nějakých bodů z A^N vybraných tak, že na ještě nepoužitých souřadnicích vystřídáme všechny kombinace hodnot, v i-té souřadnici vždy použijeme nějakou kombinaci N_i nul a jedniček a ve zbývajících souřadnicích dosazujeme podle už sestrojených bloků.)

Všimneme si, že možných funkcí z A^{M+n-i} do $[r]$ je pouze $r^{a^{M+n-i}} \le r^{a^{M+n}} = N_i$, takže podle Holubníkova principu⟨1⟩ musí existovat k, ℓ taková, že $\chi_k = \chi_\ell$ a $k < \ell$.

⟨1⟩ Голуб Голубич Голубников, bájný ruský matematik, současník J. P. G. L. Dirichleta. Správně by tedy mělo být „Golubnikovova", ale to víte, tradice ...

Obarvení χ_k odpovídá nastavení $\alpha_i = 0^k 1^{N_i - k}$, obarvení χ_ℓ pak $\alpha_i = 0^\ell 1^{N_i - \ell}$. Zvolíme tedy $\alpha_i = 0^k *_i^{\ell - k} 1^\ell$, což souhlasí s obojím, a pokračujeme předchozím blokem.

(Na volbě čísel N_i samozřejmě není zhola nic magického, jsou nastavena právě tak, aby právě použitý holubníkový argument fungoval, a nejsou potřeba nikde jinde.)

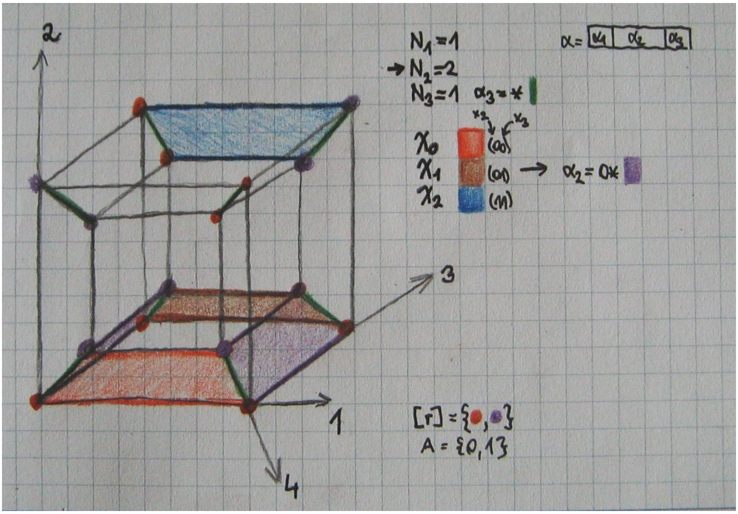
Takto sestrojený multikořen $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n$ opravdu určuje nějakou n-rozměrnou podkrychli. Zbývá si uvědomit, že je skutečně obarvena konsistentně. Mějme nějaké dva sousední body $x, y \in A^n$ takové, že $x_i = 0$, zatímco $y_i = 1$. V podkrychli tedy vystupují jako $\alpha(x)$ a $\alpha(y)$. Pro jejich obarvení platí (k, ℓ a M si vypůjčíme z kroku, v němž jsme určovali α_i):

$$\begin{aligned}
\chi(\alpha(x)) &= \chi(\alpha_1(x_1) \ldots \alpha_{i-1}(x_{i-1}) \alpha_i(0) \alpha_{i+1}(x_{i+1}) \ldots \alpha_n(x_n)) \\
&= \chi(z_1 \ldots z_M 0^k 0^{\ell-k} 1^\ell \alpha_{i+1}(x_{i+1}) \ldots \alpha_n(x_n)) \quad \text{pro nějaká } z_1, \ldots, z_M \\
&= \chi_k(z_1 \ldots z_M y_{i+1} \ldots y_n) \\
&= \chi_\ell(z_1 \ldots z_M y_{i+1} \ldots y_n) \\
&= \chi(z_1 \ldots z_M 0^k 1^{\ell-k} 1^\ell \alpha_{i+1}(x_{i+1}) \ldots \alpha_n(x_n)) \\
&= \chi(\alpha_1(y_1) \ldots \alpha_{i-1}(y_{i-1}) \alpha_i(1) \alpha_{i+1}(y_{i+1}) \ldots \alpha_n(y_n)) \\
&= \chi(\alpha(y)).
\end{aligned}$$

Ještě trocha geometrické intuice: Když máme hotovo $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$, každé nastavení zbývajících souřadnic (prvních $M + N_i$) určuje jednu $(n-i)$-rozměrnou podkrychli v A^N. Každá volba t pak odpovídá tomu, že si ze všech těchto podkrychlí vybereme ty, které mají v souřadnicích patřících do i-tého bloku správnou kombinaci nul a jedniček. Navíc si tyto podkrychle uspořádáme do posloupnosti C_t lexikograficky. Funkce χ_t pak není nic jiného než průmět obarvení χ celé krychle na obarvení posloupnosti C_t.

Jelikož je těchto posloupností dostatečně mnoho, existují C_k a C_ℓ obarvené stejně. Každá krychle z C_k přitom vznikne posunutím odpovídající krychle z C_ℓ o jedničku v souřadnicích, ve kterých se předepsané nuly a jedničky liší. Pokud přidáme ještě dalších $a - 2$ posunutí o ostatní hodnoty, vytvoříme tím krychli o jedničku vyšší dimenze a jelikož první dvě posunutí byla obarvena stejně, je tato nová krychle v i-té dimenzi obarvena konsistentně. Takovou krychli ovšem máme pro libovolné nastavení předchozích M souřadnic, takže v dalším kroku můžeme přidat konsistenci v $(i-1)$-ní dimenzi a tak dále.

Dobře je to vidět na následujícím obrázku. Aby se nám vešel do čtyř dimenzí, zvolili jsme (nerealisticky) $n = 3$, $N_1 = 1$, $N_2 = 2$ a $N_3 = 1$ a také nejjednodušší možný případ $r = 2$, $a = 2$. Zastavili jsme se v okamžiku, kdy α_3 už je určeno a chceme najít α_2. Zelené hrany jsou všechny 1-dimenzionální krychle vytvořené posunutím kořene α_3. Ty z nich, které spadají do C_0 (resp. barví je χ_0), jsme si označili oranžově. Podobně C_1 hnědě a C_2 modře. Nyní si všimneme, že oranžová a hnědá konfigurace jsou obarveny stejně, takže zvolíme $\alpha_2 = 0{*}_2$. Tím se nám každá krychle v C_0 spojí s odpovídající krychlí v C_1 do fialové krychle o jedničku větší dimenze (pokud by bylo $a > 2$, přibrala by ještě další svá posunutí, ale ta nejsou zajímavá, protože se jich konsistence netýká). Všechny takové krychle (v našem případě jsou dvě) pak postupují do dalšího kroku indukce.*



♡

Důsledek (Van der Waerdenova věta): Pro každé t (délka posloupnosti) a r (počet barev) existuje N takové, že v libovolném obarvení množiny $[N]$ pomocí r barev existuje jednobarevná aritmetická posloupnost délky t.

Důkaz: Uvažme krychli $K = [t]^n$ pro nějaké n a funkci $f : K \to [tn]$ definovanou předpisem $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$. Všimněme si, že pro libovolnou kombinatorickou přímku L v krychli K je $f[L]$ aritmetická posloupnost v $[tn]$. Stačí tedy zvolit $n = \mathrm{HJ}(r,t)$ podle Hales-Jewettovy věty a nastavit $N = tn$. Libovolné zadané obarvení množiny $[tn]$ pak přeložíme funkcí f na obarvení krychle K a nalezenou monochromatickou přímku přeložíme zpět do $[tn]$ na jednobarevnou aritmetickou posloupnost. ♡

Můžeme dokázat i obecnější verzi pracující v d-rozměrném prostoru. Místo aritmetických posloupností pak budeme hledat *homotetické kopie* nějaké konečné množiny $H \subset \mathbb{Z}^d$, což budou množiny ve tvaru $v_0 + \lambda H$ pro $v_0 \in \mathbb{Z}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}^+$.

Věta (Gallai, Witt): Pro každé d (dimenze) a konečnou množinu $H \subset \mathbb{Z}^d$ platí, že v libovolném obarvení prostoru $\mathbb{Z}^d$ konečně mnoha barvami existuje jednobarevná homotetická kopie množiny H.

Důkaz: Označme si r počet barev použitých v obarvení prostoru a $v_1, \ldots, v_a$ body množiny H. Podobně jako v předchozím důkazu uvážíme krychli H^n pro nějaké n a definujeme funkci $f : H^n \to \mathbb{Z}^d$ předpisem $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$. Všimneme si, že každou přímku L v krychli $\mathbb{Z}^d$ tato funkce zobrazí na hometickou kopii množiny H v $\mathbb{Z}^d$. Proč to tak je? Nechť je $L = \{\alpha(v_1), \ldots, \alpha(v_a)\}$ pro nějaký kořen $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_a$. Pokud $\alpha_i \neq *$, přispěje α_i ke všem součtům $f(\alpha(v_j))$ stejně a tento příspěvek se schová do v_0. Pokud naopak $\alpha_i = *$, přispěje k $f(\alpha(v_j))$ hodnotou v_j. Ke každému součtu tedy přispěje jednak konstanta, jednak nějaký počet v_j daný počtem hvězdiček v kořeni α, čili pro všechna j stejný.

Teď už zbývá použít Hales-Jewettovu větu a nastavit $n = \mathrm{HJ}(r, a)$. Každé obarvení prostoru $\mathbb{Z}^d$ nám určí obarvení krychle H^n, v té najdeme jednobarevnou přímku a tu přeložíme zpět do $\mathbb{Z}^d$ na homotetickou kopii H. ♡

Teď už pouze dodáme, že bychom mohli dokonce místo celého prostoru barvit jen nějaký omezený podprostor $[N]^d$ a najít jednobarevnou kopii H i tam. Jeho velikost N by pak samozřejmě závisela na velikosti H a počtu použitých barev (a příslušných Hales-Jewittových čísel). Důkaz by byl tentýž.