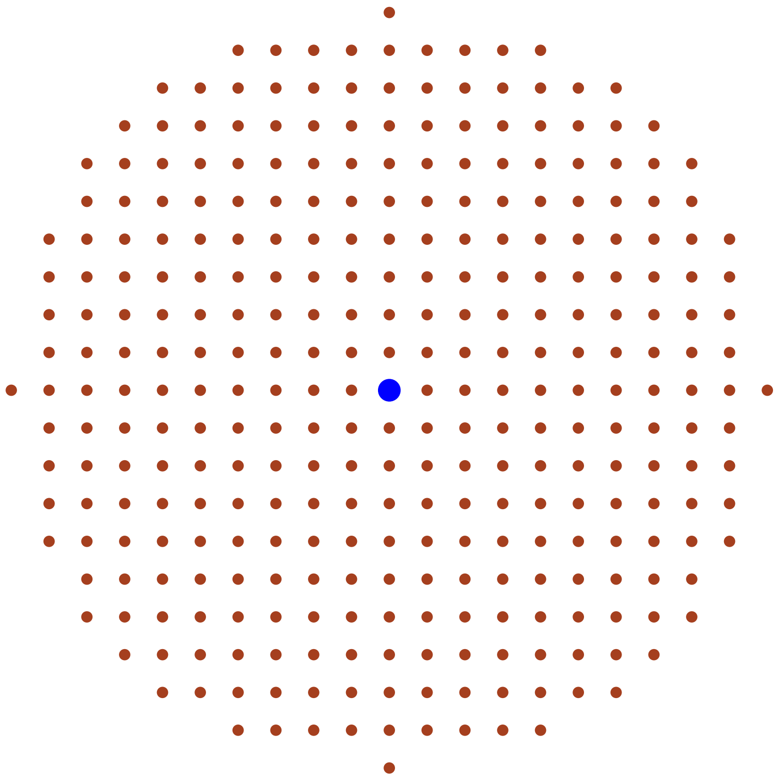
Jak se neztratit v lese

V jedné zemi za devatero horami byl jest jeden lesík. A jelikož v oné zemi měli rádi pořádek, lesík byl dočista pravidelný. Ležel v rovině a tvořily ho kruhové stromy o poloměru 0,15, jejichž středy ležely v bodech $[x, y]$ s celočíselnými souřadnicemi, které navíc nemají od počátku souřádnic vzdálenost větší než 10 (jinými slovy $x^2 + y^2 \leq 100$). Navíc v počátku souřadnic jeden strom chyběl.

Zde je plán lesíka:



Otázka je snadná: Pokud se postavíte do počátku, je vidět z lesíka ven?

Řešení najdete na druhé straně.

Jak se neztratit v lese – řešení

Z lesíka vidět ven není. Abychom to dokázali, použijeme následující

Tvrzení. *M buď útvar v rovině, který je*

i) konvexní (s každými dvěma body obsahuje i jimi určenou úsečku),
ii) omezený (nachází se celý v nějakém kruhu se středem v počátku),
iii) souměrný podle počátku (s každým bodem x obsahuje i bod $-x$) a
iv) má plochu větší než 4.

Potom M nutně obsahuje mřížový bod (to je bod s celočíselnými souřadnicemi) různý od počátku.

Toto tvrzení, jež je zvláštním případem tzv. *Minkowského věty*, dokážeme za chvíli. Nejdřív z něj odvodíme, že z lesíka není z počátku vidět. Veďme počátkem přímku p a obalme ji pásem L tlustým 0,15 na každou stranu od p. Ukážeme, že v průniku L s kruhem K, který má střed v počátku a poloměr 10, vždy leží mřížový bod různý od počátku. Tím bude ukázáno, že z počátku ve směru přímky p opravdu nevidíme. $L \cap K$ jistě obsahuje obdélník M o rozměrech $0{,}3 \times 18$, který má střed v počátku a jehož delší osa souměrnosti splývá s p. M splňuje všechny předpoklady Tvrzení, zejména má plochu $0{,}3 \cdot 18 = 5{,}4 > 4$. Obsahuje tedy mřížový bod různý od počátku.

Důkaz Tvrzení. Položíme $T = \langle 0,1) \times \langle 0,1)$ (základní jednotkový čtvereček bez horní a pravé strany) a, pro $z \in \mathbb{Z}^2$ ($\mathbb{Z}^2$ je množina mřížových bodů), $M_z = (\frac{1}{2}M + z) \cap T$ (průnik M zmenšeného na polovinu a posunutého o vektor z s T). Nechť $P(\cdots)$ označuje plochu. Pak

$$\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} P(M_z) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} P((T - z) \cap \tfrac{1}{2}M) = P(\tfrac{1}{2}M) > 1.$$

Proč? První rovnost plyne z toho, že plocha se posouváním nemění a $M_z - z = (T - z) \cap \frac{1}{2}M$. Druha rovnost plyne z toho, že všechny posuny $T - z$ čtverečku T rozkládají perfektně rovinu (každý její bod se nachází v právě jednom posunu). Poslední nerovnost plyne z toho, že zmenšením velikosti na $\frac{1}{2}$ se plocha zmenší na $\frac{1}{4}$. Díky (ii) mají obě sumy konečně mnoho nenulových sčítanců.

Ale $M_z \subset T$ a $P(T) = 1$. Některé dvě množiny M_z se tedy musejí protnout (jinak by platilo $\sum P(M_z) \leq P(T) = 1$): existují $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$, $z_1 \neq z_2$, a $x_1, x_2 \in M$ tak, že $\frac{1}{2}x_1 + z_1 = \frac{1}{2}x_2 + z_2$. Pak ale $\frac{1}{2}(x_1 - x_2) = z_2 - z_1$ je hledaný nenulový mřížový bod v M: $z_2 - z_1$ je nenulový mřížový bod a $\frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ je střed úsečky s konci x_1 a $-x_2$ — podle (i) a (iii) leží v M. Tvrzení je dokázáno.